Elementos

Trigonometría Esférica

Elementos de trigonometría esférica

Antoni Vila Mitjà

Esta obra ha sido galardonada por la UPC el año 1992

EDICIONS UPC

Primera edición: setiembre de 1993
Segunda edición: setiembre de 1994

La presente obra ha sido galardonada en el primer concurso "Ajut a l'elaboració de material docent" convocado por la UPC el año 1992

Diseño de la cubierta: Manuel Andreu

Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, s.l.
C. Jordi Girona Salgado, 31, 08034 Barcelona

Producción: Servei de Publicacions de la UPC
y CPET (Centre de Publicacions del Campus Nord)
La Cup. c. Gran Capità s/n, 08034 Barcelona

Depósito legal: B-5.470-94
ISBN 84-7653-420-5

Introducción

La bibliografía existente en la actualidad sobre Trigonometría esférica ha quedado en gran medida obsoleta por el hecho de manejar conceptos y métodos ya superados. Por ejemplo, en la mayoría de los textos se destina una parte importante a la preparación de las fórmulas para el cálculo logarítmico, siendo una realidad incuestionable que las calculadoras más sencillas hacen este cálculo muy poco práctico. Por si esto fuera poco, en las tablas y obras destinadas a usos náuticos aparecen a menudo logaritmos "aumentados"...Todo ello crea en el estudiante una falsa impresión de complejidad, que creemos que puede desaparecer con una presentación sencilla y actualizada de los temas más importantes; ésta es la parte innovadora en estos Elementos, tanto en contenido como en metodología.

Uno de los motivos primordiales que han impulsado la publicación de este manual es precisamente la falta de material didáctico sobre la materia. Por esta razón creemos que puede ser de utilidad para cualquier centro docente que desee ofrecer los conocimientos esenciales sobre Trigonometría esférica, y de manera especial para los centros de enseñanzas náuticas.

Los temas se han distribuido en tres grandes bloques, de los cuales el fundamental es el segundo, dedicado a presentar los conceptos y las fórmulas básicas que se utilizan habitualmente, evitando la excesiva proliferación de casos particulares carentes de interés práctico y dejando como ejercicios otros resultados considerados interesantes.

El primer bloque está dirigido a recordar los conceptos y resultados generales sobre razones angulares y trigonometría plana que deben facilitar la comprensión del núcleo fundamental. En cuanto al tercer y último bloque de temas, se ha introducido para ofrecer nuevas perspectivas en determinadas cuestiones importantes y también para mostrar al estudiante algunas de las aplicaciones que tiene la Trigonometría esférica en disciplinas varias.

Notas históricas

La Trigonometría aparece de forma incipiente, como auxiliar de la Geometría, en los primeros albores de la Matemática. Los egipcios y los babilonios utilizan en sus cálculos unos conceptos que pueden considerarse precursores de las razones trigonométricas. Sin embargo, el estudio sistemático de las relaciones entre los arcos de una circunferencia y las longitudes de las cuerdas que subtienden se lleva a cabo por primera vez entre los griegos, uno de los cuales, Hiparco de Nicea (180-125 a.C.), al que se le atribuye un tratado sobre el cálculo de las cuerdas en un círculo, suele considerarse como el padre de la Trigonometría.

También la Trigonometría esférica tiene sus inicios en la antigüedad clásica. Menelao de Alejandría (100 d.C.) fue el primero en definir un triángulo esférico en su tratado Sphoerica, y desarrolló en él un gran número de teoremas de la trigonometría esférica basados en el célebre teorema de Menelao.

Pero el gran maestro en cuestiones trigonométricas fue sin duda Claudio Tolomeo (85-165 d.C.) cuya ingente obra de trece libros -Almagesto- puede considerarse el tratado de Astronomía por excelencia hasta la época de Copérnico y Kepler.

A partir del siglo XII llega la trigonometría a los países occidentales de manos de los matemáticos árabes, que transmiten las contribuciones griegas e indias en esta materia. En todas ellas, los cálculos trigonométricos aparecen orientados de forma casi exclusiva a las aplicaciones astronómicas o náuticas; pero el matemático árabe Nasir Al-Din (1201-1274) ya preconiza la consideración de la Trigonometría como una rama particular de las Matemáticas dotada de entidad propia, al publicar un primer tratado sobre trigonometría plana y esférica independiente de la Astronomía.

Es en pleno siglo XV que se produce un decisivo avance en la trigonometría debido a las obras de Johan Müller (1436-1476), más conocido como Regiomontano, que realiza una exposición sistemática de los distintos métodos de resolución de triángulos planos y esféricos. Paralelamente a los trabajos de Regiomontano y de su maestro Peurbach, otros

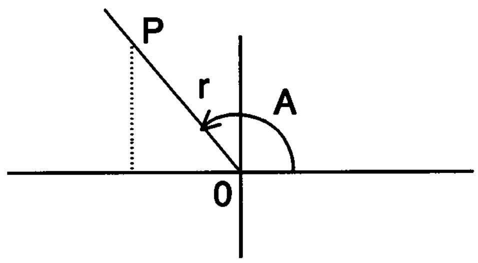
Índice

PRELIMINARES

Capítulo 1. Razones asociadas a un ángulo orientado

1.1 Seno y coseno

Sea A un ángulo orientado del plano ordinario, con el primero de sus lados coincidente con el semieje positivo de abscisas de un sistema de referencia cartesiano rectangular:



Si P(x,y) es un punto del segundo lado del ángulo, situado a una distancia r del vértice O , se definen las dos razones características del ángulo A:

$$\textit{Seno de } A: \quad sen\, A = \frac{y}{r},$$

$$\textit{Coseno de } A: \quad \cos A = \frac{x}{r}.$$

De acuerdo con estas definiciones, deberá verificarse la identidad siguiente:

$$sen^2 A + \cos^2 A = 1$$

y, por consiguiente, las acotaciones :

$$-1 \leq sen\, A \leq 1\,, \quad -1 \leq \cos A \leq 1\,.$$

Obsérvese que, para r = 1,las coordenadas del punto P serán precisamente (cos A,sen A).

1.2 Otras razones goniométricas

Utilizando los tres números x , y , r pueden definirse otras razones distintas del seno y coseno, siempre que los denominadores que intervengan en ellas sean distintos de cero. Cada una de ellas recibe un nombre especial :

Tangente de A: $tg\ A = \frac{y}{x} = \tan A$,

Cotangente de A: $\cot A = \frac{x}{y}$,

Secante de A: $\sec A = \frac{r}{x}$,

Cosecante de A: $\operatorname{cosec} A = \frac{r}{y}$.

Los únicos ángulos para los que no existen algunas de las seis razones definidas son los extremos de los cuadrantes, es decir, los de 0° , 90° , 180° y 270°.

Ejercicios propuestos

1.- Preparar un cuadro en el que aparezcan las razones de los ángulos extremos de cuadrantes, indicando en él las que no existen.

2.- Demostrar que para todo ángulo A, cuyo coseno sea distinto de cero, se verifica:

$$\text{tg } A = \frac{sen\ A}{\cos A}, \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A}.$$

3.- Demostrar que para todo ángulo A cuyo seno sea distinto de cero, se verifica:

$$\cot A = \frac{\cos A}{sen\ A}, \qquad \operatorname{cosec} A = \frac{1}{sen\ A}.$$

4.- Demostrar que, si tg A no es cero, tg A · cot A = 1.

5.- Calcular las restantes razones de un ángulo del primer cuadrante cuyo seno vale 0,5.

6.- Calcular las restantes razones de un ángulo del segundo cuadrante cuyo coseno vale -0,8.

7.- Calcular las restantes razones de un ángulo del tercer cuadrante cuya tangente vale 2.

8.- La hipotenusa de un triángulo rectángulo plano mide 28 cm y el seno de uno de sus ángulos agudos es 0,75 . Calcular los dos catetos.

9.- La tangente de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo vale 1. ¿Cómo son entre sí los dos catetos?

10.- Demostrar que el seno de 30° vale 0,5.

11.- Demostrar que la secante de 60° es igual a 2.

12.- ¿Cuál es el dominio de la función "tangente"?

13.- ¿Es periódica la función seno? ¿Cuál es su período?

14.- ¿Es periódica la función coseno? ¿Cuál es su período?

1.3 Caracterización de un ángulo orientado por el coseno y el seno

a) Todo ángulo orientado A , $0° \leq A < 360°$, determina un par ordenado único de números reales (a,b) con las condiciones siguientes:

$$-1 \leq a \leq 1, \quad -1 \leq b \leq 1, \quad a^2 + b^2 = 1 .$$

La existencia y unicidad del par ordenado (a,b) están puestas de manifiesto en la definición constructiva que hemos utilizado: a= cos A , b= sen A .

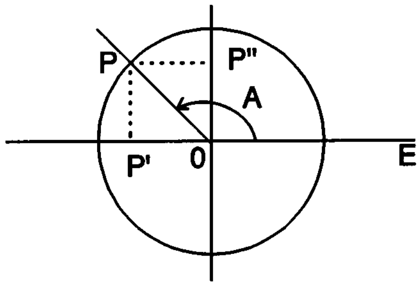
b) Dado un par ordenado de números reales (a,b) que cumplan las condiciones del apartado a) , existe un ángulo orientado A y uno sólo, tal que: cos A = a , sen A = b.

La construcción efectiva de A consiste en tomar como primer lado del mismo el semieje positivo de abscisas de un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares y como segundo lado la semirrecta OP , en la que P es el punto de coordenadas (a,b).

1.4 Círculo unitario

El círculo de centro O y radio 1 recibe el nombre de círculo unitario ; permite visualizar los valores de las razones de un ángulo orientado A .

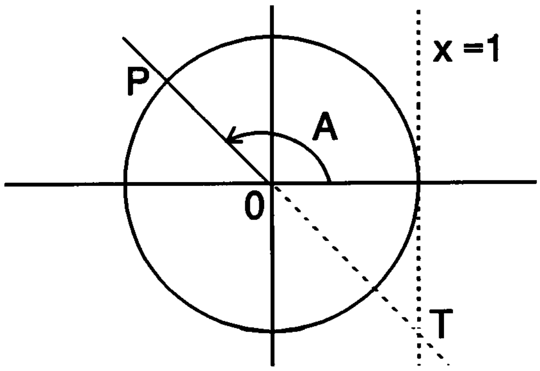
Para ello, se conviene en situar el primer lado del ángulo coincidiendo con la semirrecta OE y el vértice en O ; de este modo, puede tomarse como punto P la intersección de la circunferencia con el segundo lado del ángulo.



Si P′ es la proyección ortogonal de P sobre el eje de abscisas, y P′′ la proyección ortogonal de P sobre el eje de ordenadas, las coordenadas de P′ y P′′ son :

$$P'(\cos A\ , 0)\ ,\quad P''(0\ , \mathit{sen}\ A)\ .$$

1.5 La tangente de un ángulo en el círculo unitario



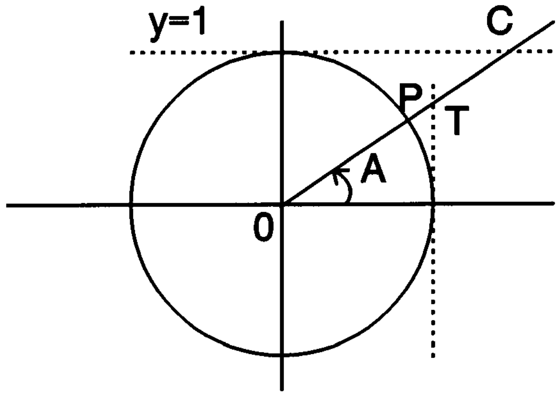
El punto T , intersección de la recta OP con la recta de ecuación x = 1 , tiene por coordenadas:

$$T(1\ , \operatorname{tg} A)\ .$$

La ordenada de T coincide con la tangente del ángulo orientado A .

1.6 Cotangente, cosecante y secante en el círculo unitario

La cotangente es la abscisa del punto C , intersección de la recta OP y la recta y = 1



La distancia OC es igual al valor absoluto de la cosecante de A :

$$OC^2 = 1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A .$$

Y la distancia OT coincide con el valor absoluto de la secante de A :

$$OT^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 A = \sec^2 A .$$

Ejercicios propuestos

15.- Supongase que sen x = s. Expresa las razones goniométricas de x en función de s.

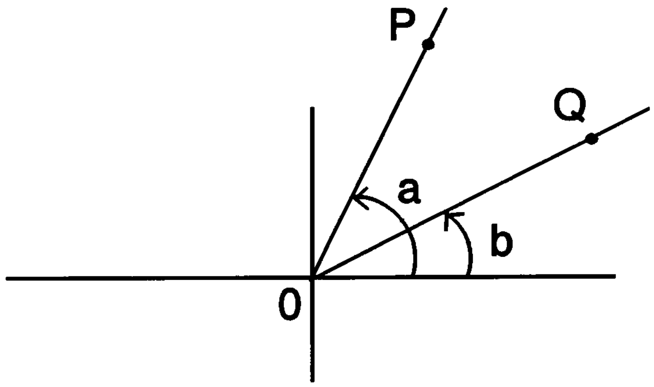
16.- Si cos x = c, expresa en función de c las otras razones goniométricas del ángulo x.

17.- Expresa sin x i cos x en función de tan x = t.

Capítulo 2. Formulario básico

2.1 Coseno del ángulo diferencia de otros dos

Sean OP y OQ dos vectores unitarios :



$$OP = (\cos a,\ sen\ a)\,,$$
$$OQ = (\cos b,\ sen\ b)\,.$$

Al igualar las dos expresiones posibles para el producto escalar ordinario de OP y OQ :

$$\cos a \cos b + sen\ a\ sen\ b$$
$$OP \cdot OQ \cdot \cos(a-b) = \cos(a-b)\,,$$

se obtiene la identidad :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + sen\, a\ sen\, b\,.$$

2.2 Relaciones entre dos ángulos complementarios

$a)$ $\cos(90 - a) = \cos 90 \cos a + sen\, 90\; sen\, a = sen\, a$.

$b)$ $\cos a = \cos(90 - (90 - a)) = sen(90 - a)$.

2.3. Relaciones entre ángulos opuestos

$a)$ $\cos(0 - b) = \cos 0 \cos b + sen\; 0\; sen\; b = \cos b$.

$b)$ $sen^2(-b) + \cos^2(-b) = 1 \Rightarrow sen^2(-b) = sen^2 b$.

Al ser $sen^2(-b) = sen^2 b$, $sen(-b) = \pm\, sen\, b$;
pero no puede ser $sen(-b) = sen\, b$, puesto que en este caso coincidirían el coseno y el seno de b con los de -b , con lo que $b = -b$. Por consiguiente, debe verificarse que

$$sen\,(-b) = -\,sen\; b.$$

2.4 Fórmulas de adición y de sustracción

$a)$ $\cos(a + b) = \cos(a-(-b)) = \cos a \cos b - sen\; a\; sen\; b$.

$b)$ $sen(a - b) = \cos(90 - (a - b)) = \cos((90 - a) + b) =$
$= sen\, a \cos b - \cos a\; sen\, b$.

$c)$ $sen(a + b) = sen(a - (-b)) = sen\, a \cos b + \cos a\; sen\, b$.

2.5 Relaciones entre dos ángulos suplementarios

$a)$ $sen(180^o - a) = sen\, 180 \cos a - \cos 180\, sen\, a = sen\, a$,
$\cos(180^o - a) = -\cos a$.

2.6 Fórmulas para el "*ángulo doble*"

$a)$ $sen\, 2a = sen(a+a) = 2 sen\, a \cos a$,

$b)$ $\cos 2a = \cos(a+a) = \cos^2 a - sen^2 a$.

2.7 Fórmulas para el "*ángulo mitad*"

Se deducen del siguiente sistema de identidades:

$$\left.\begin{aligned} \cos^2\frac{a}{2}+sen^2\frac{a}{2} &= 1 \\ \cos^2\frac{a}{2}-sen^2\frac{a}{2} &= \cos a \end{aligned}\right\}$$

$$sen^2\frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{2}, \quad \cos^2\frac{a}{2} = \frac{1+\cos a}{2}.$$

2.8. Transformaciones en producto

$$sen\,a+sen\,b = sen(x+y)+sen(x-y) = 2sen\,x\,\cos y = $$
$$= 2sen\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}.$$

Siguiendo un procedimiento análogo al de la identidad precedente, resultan otras identidades notables :

$$sen\,a-sen\,b = 2\cos\frac{a+b}{2}\,sen\frac{a-b}{2},$$

$$\cos a+\cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2},$$

$$\cos a-\cos b = 2sen\frac{a+b}{2}\,sen\frac{b-a}{2}.$$

Ejercicios propuestos

18.- Obtener fórmulas de "adición" y "sustracción" para la tangente, utilizando en el resultado exclusivamente tangentes de los ángulos a y b .

19.- Completar las relaciones entre ángulos complementarios, opuestos y suplementarios, utilizando la tangente, la cotangente, la secante y la cosecante.

20.- Obtener relaciones entre ángulos que "difieran en un ángulo recto" .

21.- Obtener unas fórmulas para sen (180° + a) y para cos (180° + a).

22.- Demostrar que tg a = tg(180° + a).

23.-Demostrar que $sen\, a = sen(360^o + a)$, $\cos a = \cos(360^o + a)$.

24.- Demostrar las implicaciones siguientes:

a) $a+b+c = 90^o \rightarrow \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c = 1$,

b) $a+b+c = 180^o \rightarrow \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c$.

25.- Demostrar que

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \frac{sen\,(a+b)}{\cos a \cos b},$$

$$\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \frac{sen\,(a-b)}{\cos a \cos b}.$$

26.- Demostrar que

$$\frac{tga+tgb}{tga-tgb} = \frac{sen(a+b)}{sen(a-b)}.$$

27.- Si tg x/2 = t, justificar las identidades siguientes, que son muy utilizadas en el cálculo integral:

$$senx = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad tgx = \frac{2t}{1-t^2}.$$

28.- Sabiendo que e^{ix} = cos x + i sen x, demostrar que el numero complejo e^{ix} es unitario y tiene x como argumento.

29.- Encontrar fórmulas para expresar cos 3x y sen x en función de sen x y cos x, a partir de la identidad:

$$(\cos x + i senx)^n = \cos nx + i sennx$$

30.- Calcular A y B:

$$A = \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx$$

$$B = senx + sen2x + ... + sennx,$$

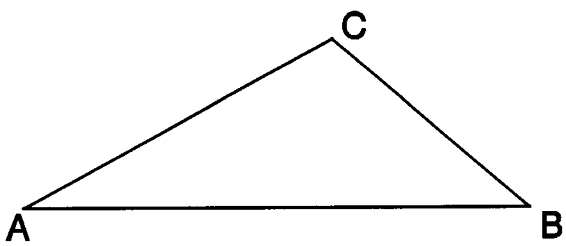
sabiendo que

$$A + iB = e^{ix} + e^{2ix} + ... + e^{nix}.$$

Capítulo 3. Trigonometría plana

3.1

Definición: *Un triángulo plano es un polígono de tres lados.*



Las propiedades fundamentales de los lados y los ángulos de un triángulo plano son :

a) *Cada lado es menor que la suma de los otros dos, y mayor que su diferencia .*

b) *La suma de los tres ángulos del triángulo es constante, e igual a 180º .*

c) *A mayor lado se opone mayor ángulo, y recíprocamente. A lados iguales se oponen ángulos iguales, y recíprocamente.*

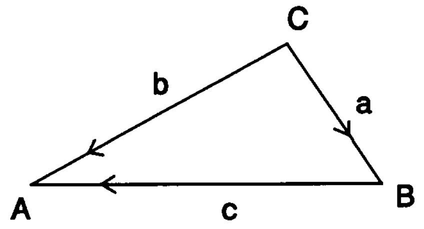
3.2 Resolución de triángulos

Si llamamos "elementos" del triángulo a sus lados y ángulos, entendemos por *resolver* el triángulo el cálculo de los seis elementos, conociendo tres de ellos ; la única condición es que por lo menos uno de los elementos conocidos sea un lado.

Mediante *dos* grupos de fórmulas podremos realizar el cálculo efectivo del elemento que nos interese, a partir del conocimiento de tres elementos, uno de los cuales por lo menos debe ser un lado.

3.3 Grupo del coseno

De la igualdad vectorial $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$ se deduce, utilizando el "cuadrado escalar" del vector $\vec{a}$:



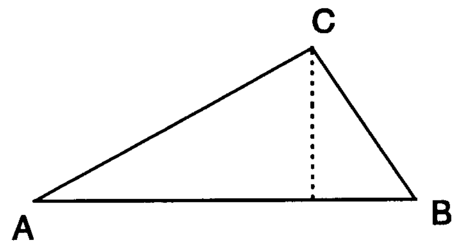
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A .$$

Permutando letras, se obtienen las restantes ecuaciones del grupo:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B ,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C .$$

Cada fórmula del grupo relaciona *los tres lados* del triángulo con *uno de sus ángulos*. Por consiguiente, habrá que acudir a él siempre que interese relacionar los tres lados con un ángulo, prescindiendo inicialmente de cuál de estos elementos sea la incógnita. El momento de precisar cuál es ésta y de despejarla, será cuando procedamos al cálculo efectivo.

3.4 Grupo de los senos



El área del triángulo es igual a la mitad del producto de dos lados cualesquiera por el seno del ángulo que determinan; por consiguiente, se verificarán las igualdades siguientes:

$$ab\ sen C = ac\ sen B = bc\ sen A\,,$$

de donde

$$b\ sen C = c\ sen B\,,$$
$$a\ sen B = b\ sen A\,,$$
$$a\ sen C = c\ sen A\,.$$

Este es el grupo de fórmulas conocido como "grupo de los senos"; en forma continua, el grupo puede escribirse :

$$\frac{a}{sen A} = \frac{b}{sen B} = \frac{c}{sen C}\,.$$

En este grupo de fórmulas se establece la proporcionalidad entre los lados de un triángulo y los senos de sus respectivos ángulos opuestos.

Cada fórmula del grupo relaciona *dos lados* del triángulo con *sus dos ángulos opuestos* .

Ejercicios resueltos

1.- *Se conocen los tres lados de un triángulo plano :*

a = 125 m, b = 79 m, c = 106 m.

Calcular los ángulos de dicho triángulo.

Solución

Para el ángulo A:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A\,,$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\,,$$

de donde **A = 83° 39,1′.**

Para el ángulo B:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\,,$$

de donde **B = 38° 54,7′.**

El ángulo restante C puede calcularse teniendo en cuenta que la suma A + B + C es 180° . Sin embargo, podemos calcularlo también con la fórmula adecuada del grupo del coseno, y comprobar que, efectivamente, los tres ángulos hallados suman 180° .

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\,,$$

de donde **C = 57° 26,2′.**

2.- *En un triángulo plano se han medido los tres elementos siguientes :*

a = 214 m, B = 41° 04', C= 107° 23'.

Calcular los tres elementos restantes.

Solución

Para el ángulo A :

***A** = 180° - (41° 04' + 107° 23') = **31° 33'**.*

Para calcular el lado b utilizaremos una de las fórmulas del grupo de los senos:

$$\frac{a}{sen A}=\frac{b}{sen B},$$

$$b=\frac{a\, sen B}{sen A},$$

$$\boldsymbol{b=268{,}7\ m}.$$

También podremos calcular el lado c a partir de una de las fórmulas del grupo de los senos :

$$\frac{a}{sen A}=\frac{c}{sen C},$$

$$c=\frac{a\, sen C}{sen A},$$

$$\boldsymbol{c=390{,}3\ m}.$$

3.- *Se conocen dos lados de un triángulo plano y el ángulo comprendido entre ambos :*

b = 137 m, c = 69 m, A = 54° 12'.

Calcular el lado desconocido.

Solución

La fórmula que relaciona los tres lados con el ángulo A conocido es:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

$$\boldsymbol{a=111{,}7\ m}.$$

4.- *Calcular el lado b de un triángulo plano del que se conocen:*
a = 211 m, c = 74 m, B= 106° 47'.

Solución

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B,$

$b = \mathbf{242{,}9}\ m.$

5.- *Hallar una fórmula para calcular el ángulo B de un triángulo plano en función de los lados b , c y del ángulo comprendido, A.*

Solución

La fórmula buscada no está ni en el grupo del coseno ni en el de los senos . Pero puede deducirse de una de las de este último grupo, recordando que *A + B = 180° - C.*

En efecto, de la proporción

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C},$$

deducimos:

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen}(A+B)},$$

$$\frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{b},$$

$$\operatorname{sen} A \cot B + \cos A = \frac{c}{b},$$

$$\cot B = \frac{\frac{c}{b} - \cos A}{\operatorname{sen} A},$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{sen} A}{\frac{c}{b} - \cos A}.$$

Análogamente, para el ángulo *C*:

$$\operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{sen} A}{\frac{b}{c} - \cos A}.$$

Las dos fórmulas obtenidas presentan el interés práctico de proporcionar los valores de los ángulos B y C mediante un cálculo independiente de resultados parciales, esto es, que utiliza exclusivamente los datos del problema ; por consiguiente, no resulta afectado por posibles errores en los cálculos previos efectuados para los restantes elementos del triángulo.

6.- *Resolver un triángulo plano, del que se conocen :*

a = 25 m, b = 64 m, C = 54° 21′

mediante cálculos independientes .

Solución

Para el lado c utilizaremos una fórmula del grupo del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C\,,$$

$$\boldsymbol{c = 53{,}44\ m}\,.$$

Para el ángulo A :

$$\mathrm{tg}A = \frac{\mathrm{sen}\,C}{\dfrac{b}{a} - \cos C}\,,$$

$$\boldsymbol{A = 22°\,20{,}5'}\,.$$

Y para calcular el ángulo B :

$$\mathrm{tg}B = \frac{\mathrm{sen}\,C}{\dfrac{a}{b} - \cos C}\,,$$

$$\boldsymbol{B = 103°\,18{,}5'}\,.$$

3.5 Casos "dudosos"

En todos los ejercicios resueltos hasta ahora, existía un triángulo y uno sólo con los datos del enunciado del problema, con lo que cada uno de los elementos buscados estaba unívocamente determinado. Es instructivo, y lo recomendamos como ejercicio al lector, realizar la construcción gráfica del triángulo correspondiente a los elementos conocidos en cada caso ; comprobará que obtiene siempre una única solución.

En cambio, si se indican las medidas de *dos lados* de un triángulo plano y la del *ángulo opuesto a uno de ellos*, el problema no tiene siempre solución única. Es posible que en algunos casos existan dos triángulos que compartan los mismos datos, por lo que habrá que hacer un estudio de cada problema concreto para decidir si existe una o dos soluciones.

Para concretar, designaremos por a , b y A los lados y el ángulo conocidos. El primer cálculo se dirigirá a conocer el ángulo o ángulos B , mediante una de las fórmulas del grupo de los senos :

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B},$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a}.$$

Si los datos conocidos corresponden a un triángulo, deberá verificarse que :

$$b \operatorname{sen} A \leq a,$$

puesto que en caso contrario, el cociente $\frac{b \operatorname{sen} A}{a}$ sería mayor que 1 , y no existiría ningún ángulo B con este valor para el seno.

Por consiguiente, es condición *necesaria* para la existencia del triángulo que

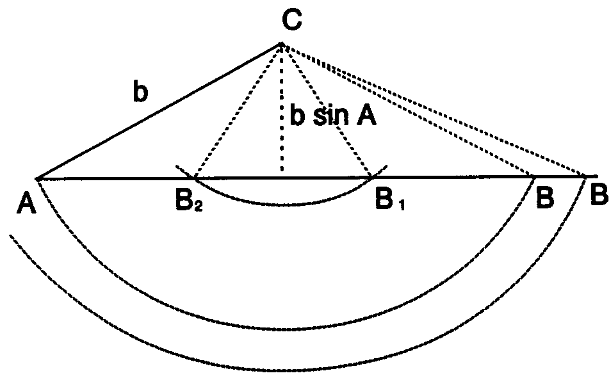
$$b \operatorname{sen} A \leq a.$$

La existencia efectiva de triángulos con los datos a, b , A , y el número de ellos, depende de los valores concretos de los elementos conocidos.

Estudiemos detalladamente todas las posibilidades; dejaremos los razonamientos y justificaciones intermedios como trabajo del lector.

1) Supongamos en primer lugar que $A < 90°$. Según la relación entre los dos lados conocidos, a y b , resulta :

$a > b \longrightarrow A > B$. Una sola solución, con $B < 90°$.
$a = b \longrightarrow A = B$. Una solución, con $B < 90°$.
$a < b \longrightarrow A < B$. Dos soluciones, una con $B_1 < 90°$
y la otra con $B_2 = 180° - B_1 > 90°$.



Ejercicios resueltos

7.- *Calcular el ángulo B de un triángulo plano del que se conocen*
$a = 123$ m, $b = 78$ m, $A = 63°\ 42'$.
¿Cuántas soluciones hay?

Solución

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a},$$

$$B = 34°38{,}7'.$$

8.- *¿Cuántos triángulos planos pueden construirse con los datos siguientes ?*
$a = 58$ m, $b = 70$ m, $A = 40°\ 23'$.

Existen dos triángulos que comparten los datos. En efecto, de

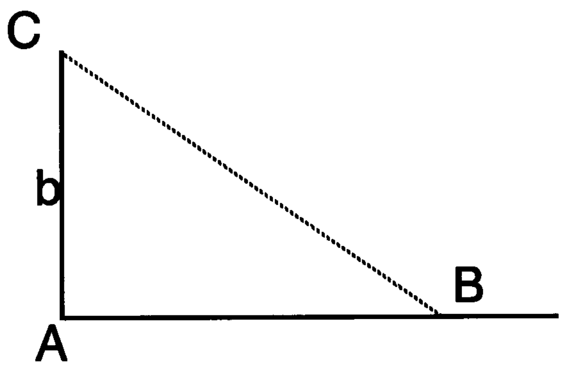
$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a}$$

se deducen dos ángulos que verifican esta igualdad y son ambos mayores que A, como debe ser por el hecho de que b sea mayor que a. Los ángulos son:

$$B_1 = 51°26{,}3', \quad B_2 = 128°33{,}7'.$$

2) Si el ángulo A, conocido, es recto ($A = 90°$), el estudio será el siguiente:

$a > b \longrightarrow A > B$. Una solución, $B < 90°$.
$a = b \longrightarrow A = B$. Ninguna solución, puesto que un triángulo plano puede tener dos ángulos rectos.
$a < b \longrightarrow A < B$. Ninguna solución, puesto que si $B > 90°, A + B > 180°$.



Ejercicio resuelto

9.- *Calcular el ángulo B de un triángulo del que se conocen :*
a = 114 m, b = 79 m, A = 90°.

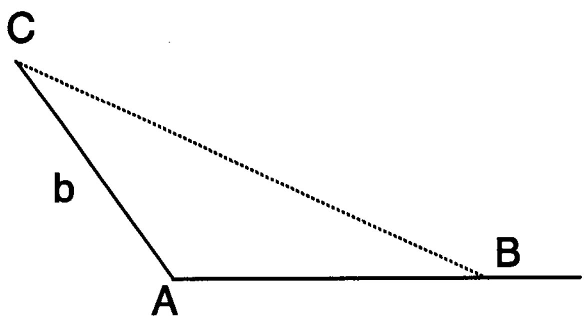
Solución

$$sen B = \frac{b\ sen A}{a},$$

$$B = 43°52'.$$

3) Finalmente, supongamos que el ángulo conocido A es obtuso (A > 90°).

$a > b \longrightarrow A > B$. Una solución, con $B < 90°$.
$a = b \longrightarrow A = B$. Ninguna solución, puesto que el triángulo no puede tener dos ángulos obtusos.
$a < b \longrightarrow A < B$. Ninguna solución.



10.- *Calcular el ángulo B de un triángulo del que se conocen los siguientes elementos :*
a = 73 m, b = 58 m, A = 102° 11'.

Solución

$$sen B = \frac{b\ sen A}{a},$$

$$B = 50°57,1'.$$

Ejercicios propuestos

31.- En cada uno de los casos siguientes, resolver el triángulo procurando que los cálculos de los elementos desconocidos sean independientes.

a) a = 122 m, b = 86 m, c = 102 m.

b) a = 125 m, b = 64 m, C = 72° 31′.

c) b = 43 m, c = 104 m, A = 95° 11′.

d) c = 143 m, A = 78° 23′, B = 59° 11′.

e) a = 76 m, A = 86°, B = 61° 23′.

32.- Calcular el lado c de un triángulo, del que se conocen

a = 123 m, b = 78 m, A = 63° 42′

sin utilizar ningún elemento que no figure entre los datos.

33.- En el ejercicio anterior, calcular el ángulo C utilizando sólo los datos iniciales.

34.- Estudiar la existencia de algún triángulo con los siguientes elementos :

b = 60 m, c = 72 m, B = 40° 12′.

35.- Estudiar si los elementos siguientes pueden formar parte de algún triángulo plano, indicando en caso afirmativo el número de soluciones y calculándolas.

a) a = 78 m, b = 45 m, A = 55°10′,

b) b = 47 m, c = 86 m, C = 60° 22′,

c) a = 112 m, c = 65 m, A = 100° 23′,

d) a = 57 m, b = 97 m, A = 101° 34′.

36.- Demostrar que la razón constante entre un lado y el seno del ángulo opuesto es igual al diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

37.- Demostrar las dos siguientes fórmulas para el área de un triángulo :

$$S = \frac{1}{2}\, bc\, senA\,,$$

$$S = \frac{abc}{4R}\,,$$

donde R es el radio de la circunferencia circunscrita.

38.- Demostrar que

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{(A+B)}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{(A-B)}{2}}.$$

39.- Utilizar el resultado anterior para efectuar el cálculo de los ángulos A y B de un triángulo, del que se conocen

a = 25 m, b = 17 m, C = 101° 12′.

40.- Demostrar: $sen\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\ (s-c)}{bc}}$,

donde s designa el semiperímetro del triángulo.

41.- Demostrar : $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$.

42.- Demostrar : $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\ (s-c)}{s\ (s-a)}}$.

43.- Utilizar los resultados anteriores para demostrar la llamada "fórmula de Herón", que expresa el área del triángulo en función de sus lados :

$$S = \sqrt{s\ (s-a)\ (s-b)\ (s-c)}\ .$$

44.- Expresar el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo en función de los lados.

45.- Expresar el radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo en función de sus lados.

46.- Calcular los ángulos de un triángulo del que se conocen sus lados : a= 26 m , b=33 m , c = 50 m . Utilizar para ello las fórmulas de tg A/2 , tg B/2 y tg C/2 .

47.- Deducir de la fórmula de cos A/2 que a < b+c .

48.- ¿Por qué en las fórmulas de sen A/2 , cos A/2 y tg A/2 no utilizamos el doble signo en las raíces cuadradas que aparecen ?

Aplicaciones "náuticas"

Un faro, situado en latitud N 32°28′, demora al N43°W de un buque situado en el paralelo 32°20′ N. Calcular la distancia del buque al faro.

. . . . .

Un buque navega a una velocidad de 15 nudos (1 nudo = 1 milla/hora) y quiere pasar a 3 millas por estribor de un faro que demora al SE y está a una distancia de 10 millas. ¿Qué rumbo deberá dar al buque? ¿A qué hora estará de través con el faro, si tomó la demora a las 5 h 10 m ?

. . . . .

Un buque navega con rumbo N30E durante 4 horas, a una velocidad de 12 nudos,con una corriente de rumbo S62°E y velocidad 4 nudos. Calcular el rumbo efectivo del buque y la distancia efectiva navegada.

. . . . .

A las 16 h del día 4 de enero, el buque A está al S de otro buque B, a 24 millas de distancia. El buque A navega al rumbo N57°E a 12 nudos y el B al S33°E a 10 nudos. Se pide:

a) Hora y fecha en que el buque B avista al A por su proa.
b) Hora y fecha en que el buque A avista al B por su popa.

. . . . .

El faro F demora al N25°W y a 5 millas de distancia de un buque; éste navega 8 millas con rumbo desconocido hacia el W y entonces el faro queda a 11 millas de distancia. Averiguar:

a) El rumbo del buque.
b) La demora del faro después de haber navegado las 8 millas.

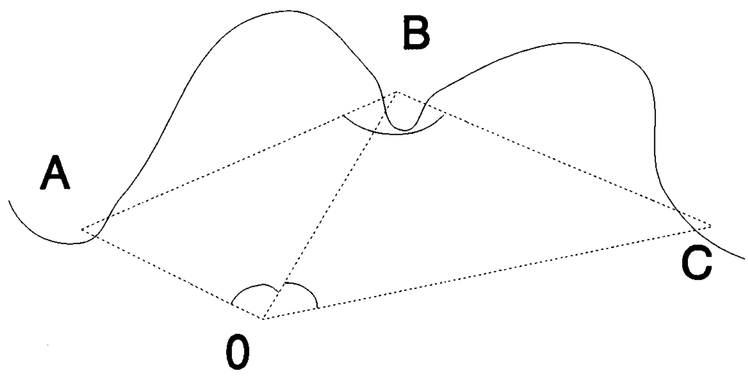
. . . . .

Un buque navega a 12 nudos de velocidad y al rumbo S54W. A las 3 h 10 m avista un faro situado a 30 millas, cuya demora es N68°W. Calcular la demora y la distancia al faro a las 5 h 40 m.

. . . . .

Situar el buque O calculando su distancia al punto A:

Datos: AB = 12 millas, BC = 21 millas, $A\hat{B}C$ = 116°, $A\hat{O}B$ = 40°, $B\hat{O}C$ = 67°.



. . . . .

El rumbo de un buque puede fijarse adoptando los siguientes criterios :

a) Punto de origen de los rumbos, el polo norte.

b) Ángulo de rumbo medido siempre en el sentido de las agujas de un reloj (dextrógiro), de 0° a 360°.

Indicar, con estos nuevos convenios, los rumbos siguientes:

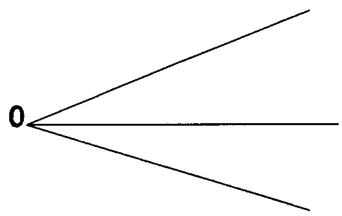
S34°E , S56°W , N21°W , NE , NW , SE , SW .

. . . . .

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

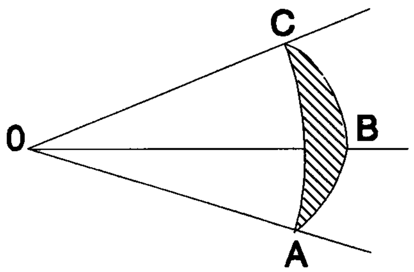
Capítulo 4. Triángulos esféricos

Consideremos un triedro convexo (vid. anexo 1) con vértice en el punto O .



4.1

Definición 4.1: **Recibe el nombre de *triángulo esférico* la intersección del triedro y una superficie esférica cualquiera con centro en el vértice O.**



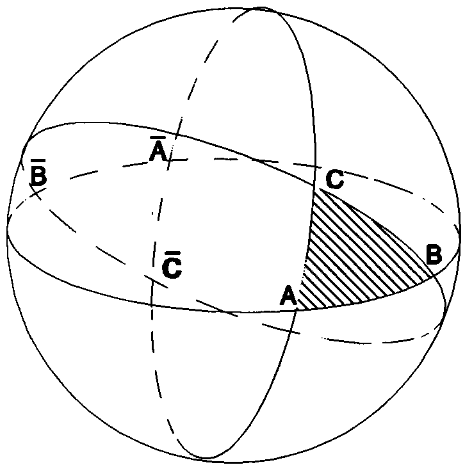
Los puntos A, B y C son los *vértices* del triángulo esférico ; los arcos de circunferencia máxima AB , BC , CA son los *lados* c , a , b , respectivamente, del triángulo.

Cada uno de ellos es menor que una semicircunferencia, esto es, mide menos de 180° ; y la suma a+b+c (perímetro del triángulo) es menor que 360° .

Los ángulos esféricos (vid. anexo 2) CAB , ABC y BCA son los ángulos A, B y C respectivamente, del triángulo esférico ABC ; cada uno de ellos es menor que un ángulo llano.

4.2 Descomposición de la superficie esférica en triángulos esféricos

Al "cortar" una superficie esférica por tres planos que pasen por el centro de la misma, se forman <u>ocho</u> triángulos esféricos ; uno de ellos es el ABC de la figura :

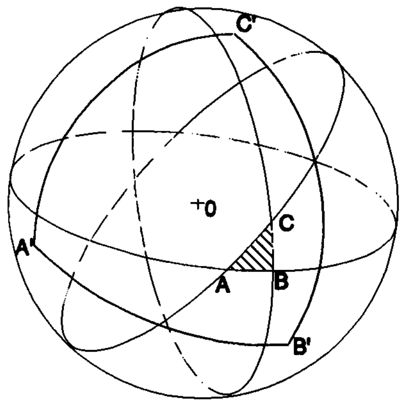


Si $\bar{A}$, $\bar{B}$ y $\bar{C}$ son los puntos diametralmente opuestos a los vértices A , B , C del triángulo inicial, los vértices de los siete triángulos restantes son :

$$\bar{A}BC,\ A\bar{B}C,\ AB\bar{C};\ \bar{A}\bar{B}C,\ A\bar{B}\bar{C},\ \bar{A}B\bar{C};\ \bar{A}\bar{B}\bar{C}.$$

Es un ejercicio interesante expresar los lados y ángulos de estos siete triángulos esféricos en función de los lados y ángulos del triángulo esférico inicial ABC ; más adelante utilizaremos estas expresiones para obtener propiedades de los lados y ángulos del triángulo ABC .

4.3 Triángulos esféricos polares



El vértice A' es el *polo* (vid. anexo 2) del círculo máximo OBC , perteneciente al mismo hemisferio que el vértice A del triángulo inicial ABC ; análogamente, B' es el polo del círculo máximo OAC que pertenece al mismo hemisferio que B , y C' es el polo del círculo máximo AB que está en el mismo hemisferio que C .

Definición 4.2: El triángulo esférico A'B'C' se llama triángulo _polar_ del ABC.

Observemos que si el triángulo inicial hubiese sido el A'B'C' , su triángulo polar hubiese resultado ser precisamente ABC ; en efecto, los vértices A , B , C , son polos, respectivamente, de los círculos máximos OB'C' , OA'C' y OB'A' , como se deduce del siguiente esquema

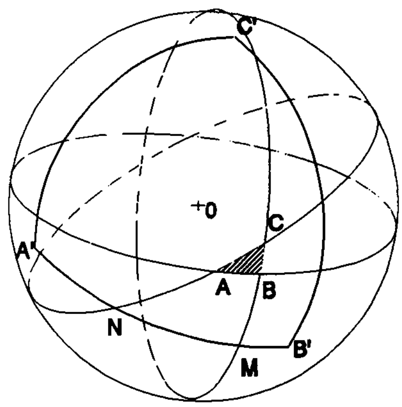
$$\left.\begin{array}{l} OA' \perp \begin{cases} OB \\ OC \end{cases} \\ \\ OB' \perp \begin{cases} OA \\ OC \end{cases} \\ \\ OC' \perp \begin{cases} OA \\ OB \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} OA \perp \begin{cases} OB' \\ OC' \end{cases} \\ \\ OB \perp \begin{cases} OA' \\ OC' \end{cases} \\ \\ OC \perp \begin{cases} OA' \\ OB' \end{cases} \end{array}$$

Por consiguiente, podemos decir que los triángulos esféricos ABC y A'B'C' son *polares entre sí* ; cada uno es polar del otro.

Los triángulos esféricos polares poseen una relación muy especial, que nos será útil más adelante :

Cada ángulo de un triángulo esférico es suplementario de un lado de su triángulo polar.

En efecto, observemos la figura:



A'M = 90°, B'N = 90°; A'M + B'N = 180°,

A'M + B'N = A'B' + MN = A'B'+ $\hat{C}$

A'B' + $\hat{C}$ = 180°.

Análogamente,

B'C' + $\hat{A}$ = A'C' + $\hat{B}$ = 180°.

Por otra parte, la propiedad simétrica de la relación binaria "ser polares" justifica relaciones análogas entre los *lados* del triángulo ABC y los *ángulos* de su triángulo polar A'B'C'

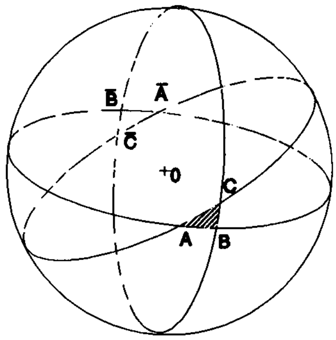
AB + $\hat{C}'$ = AC + $\hat{B}'$ = BC + $\hat{A}'$ = 180°.

4.4 Algunas propiedades de los lados y los ángulos de un triángulo esférico

a) *Lados*

Se ha indicado ya que cada uno de los lados de un triángulo esférico mide menos de 180º y que el perímetro del triángulo es menor que 360º .

Aplicando esta última propiedad a triángulos esféricos adecuados, podrán deducirse otras relaciones útiles entre los lados a, b, c de un triángulo esférico ABC, en el que supondremos que $a > b > c$.



Por ejemplo, en el triángulo $\bar{A}BC$ debe verificarse que:

$$180° - b + 180° - c + a < 360°,$$

por lo que

$$a < b + c$$

Análogamente,

$$b < a + c, \quad c < a + b.$$

Las tres desigualdades obtenidas ponen de manifiesto que *el lado mayor es menor que la suma de los otros dos.*

Por otra parte, las mismas desigualdades establecen que :

$$a > b\text{-}c\,, \qquad b > a\text{-}c\,, \qquad c > a\text{-}b$$

por lo que también puede afirmarse que *el lado menor es mayor que la diferencia de los* *otros dos .*

b) *Ángulos*

En el triángulo A'B'C' , polar del ABC , se verificará

$$a' + b' + c' < 360^\circ.$$

Por consiguiente,

$$180^\circ - A + 180^\circ - B + 180^\circ - C < 360^\circ,$$

de donde

$$A + B + C > 180^\circ.$$

Asimismo, de las relaciones

$$a' < b' + c', \quad b' < a' + c', \quad c' < a' + b'$$

se deduce que

$$B + C < 180^\circ + A, \quad A + C < 180^\circ + B, \quad A + B < 180^\circ + C.$$

4.5

Definición 4.3: **La diferencia $360^\circ - (a+b+c)$ recibe el nombre de *defecto esférico* del triángulo ABC .**

4.6

Definición 4.4: **La diferencia $(A+B+C) - 180^\circ$ se llama *exceso esférico* del triángulo ABC .**

Obsérvese que el defecto esférico de un triángulo coincide con el exceso esférico de su triángulo polar.

Exercicios propuestos

49.- Demostrar que el área de un triángulo esférico es igual a su exceso, medido en radianes, si se toma el cuadrado del radio de la superficie esférica como unidad de medida de superficies.

50.- Designemos por e el exceso esférico del triángulo esférico ABC, por e_1 el del triángulo $\bar{A}BC$, por e_2 el del triángulo $A\bar{B}C$ y por e_3 el del triángulo $AB\bar{C}$. Demostrar que la suma de los cuatro excesos esféricos es igual a 360°.

51.- Análogamente, demostrar que la suma de los cuatro defectos esféricos correspondientes a los triángulos indicados en el ejercicio anterior, también es igual a 360°.

52.- Demostrar que el exceso esférico de un triángulo esférico es igual al defecto esférico de su triángulo polar.

53.- En una superficie esférica de radio unidad, la suma de los tres ángulos de un triángulo esférico es de 225°. Calcular su perímetro, sabiendo que su área coincide con la del triángulo polar.

54.- El exceso esférico de un triángulo es de 82° 10′ y los excesos de sus triángulos adyacentes $\bar{A}BC$, $A\bar{B}C$ son, respectivamente, 68° 14′ y 122° 02′. Calcular los ángulos A, B y C del triángulo inicial.

55.- Calcular en cm^2 el área de un triángulo esférico con tres ángulos de 90°, si el radio de la superficie esférica mide 8 cm.

Capítulo 5. Resolución de triángulos esféricos

5.1 Grupos de fórmulas de Bessel

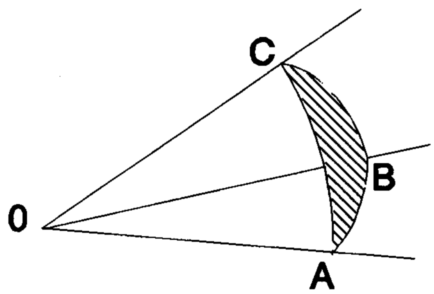
Uno de los objetivos primordiales de la Trigonometría esférica es calcular un "elemento" -lado o ángulo- cualquiera de un triángulo esférico, a partir del conocimiento de otros tres. Además, conviene que el cálculo de dicho elemento sea "independiente", es decir, que no utilice ningún elemento distinto de los previamente conocidos.

Existen unos grupos de fórmulas que permiten estos cálculos independientes en todos los casos posibles ; son los llamados *grupos de Bessel.*

5.2 Primer grupo

Cada una de las fórmulas de este grupo hace intervenir los tres lados del triángulo esférico y uno de sus ángulos.

Demostración



Consideremos el radio de la superficie esférica como unidad de medida, con lo que : OA = OB = OC = 1 .

La identidad vectorial siguiente (vid. anexo 3) :

$$(OA \times OB) \cdot (OA \times OC) = (OA \cdot OA)(OB \cdot OC) - (OA \cdot OB)(OA \cdot OC)$$

da lugar a la fórmula

$$sen\,c\ sen\,b \cos A = \cos a - \cos c \cos b,$$

de donde

$$\cos a = \cos b \cos c + sen\,b\ sen\,c \cos A.$$

Al permutar circularmente las letras, se obtienen las restantes fórmulas de este grupo, conocido como **grupo de los cosenos.**

$$\cos b = \cos c \cos a + sen\,c\ sen\,a \cos B,$$

$$\cos c = \cos a \cos b + sen\,a\ sen\,b \cos C.$$

(Para otras demostraciones, ver página 112)

5.3 Segundo grupo

Cada fórmula de este segundo grupo relaciona dos lados del triángulo con sus dos ángulos opuestos .

En forma continua, escribimos las tres igualdades del grupo del modo siguiente :

$$\frac{sen\,a}{sen\,A} = \frac{sen\,b}{sen\,B} = \frac{sen\,c}{sen\,C}.$$

Demostración

La identidad vectorial (vid. anexo 3)

$$(OA \times OB) \times (OA \times OC) = (OA \cdot (OB \times OC))\ OA$$

proporciona el resultado siguiente:

$$(sen\,c\ sen\,b\ sen\,A)\,OA = (OA \cdot (OB \times OC))\,OA,$$

de donde

$$sen\,c\ sen\,b\ sen\,A = OA \cdot (OB \times OC) = [OA, OB, OC].$$

Análogamente, al permutar letras,

$$\operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} c \ \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} b \ \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} C = [OA, OB, OC].$$

Por consiguiente,

$$\operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b \ \operatorname{sen} C = \operatorname{sen} b \ \operatorname{sen} c \ \operatorname{sen} A = \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} c \ \operatorname{sen} B;$$

o bien

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}.$$

Este grupo se conoce como el *grupo de los senos* .

(Para otra demostración, ver pág.114)

5.4 Tercer grupo

Cada fórmula de este tercer grupo relaciona dos lados del triángulo esférico con dos ángulos no opuestos .

El grupo se conoce como *grupo de las cotangentes*.

Demostración

Se parte de una fórmula del grupo de los cosenos, por ejemplo

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \ \operatorname{sen} c \cos A,$$

y se elimina el lado c mediante las sustituciones siguientes:

$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b \cos C,$$

$$\operatorname{sen} c = \frac{\operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}.$$

De este modo, se obtiene la igualdad :

$$\cos a = \cos a \cos^2 b + \cos b \ \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b \cos C + \operatorname{sen} b \ \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} C \cot A.$$

Operando y simplificando, resulta :

$$\cot a \ \operatorname{sen} b = \cos b \cos C + \operatorname{sen} C \cot A.$$

Esta es una fórmula modelo del grupo ; las otras cinco se obtienen permutando letras .

$$\cot b \ \operatorname{sen} c = \cos c \cos A + \operatorname{sen} A \cot B,$$

$$\cot c \; sen\, a = \cos a \cos B + sen\, B \cot C,$$
$$\cot b \; sen\, a = \cos a \cos C + sen\, C \cot B,$$
$$\cot c \; sen\, b = \cos b \cos A + sen\, A \cot C,$$
$$\cot a \; sen\, c = \cos c \cos B + sen\, B \cot A.$$

5.5 Cuarto grupo

Cada fórmula de este último grupo, llamado "polar" del primero, relaciona los tres ángulos de un triángulo esférico con uno de sus lados.

Demostración

Utilicemos una fórmula del grupo de los cosenos en el triángulo esférico A'B'C' , polar del ABC :

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + sen\, b' \; sen\, c' \cos A'.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que cada lado de un triángulo esférico es suplementario de un ángulo de su triángulo polar, resulta :

$$-\cos A = \cos B \cos C - sen\, B \; sen\, C \cos a,$$

o bien

$$\cos A = -\cos B \cos C + sen\, B \; sen\, C \cos a.$$

Esta es la fórmula modelo del grupo ; las otras dos se obtienen permutando circularmente las letras :

$$\cos B = -\cos A \cos C + sen\, A \; sen\, C \cos b,$$
$$\cos C = -\cos A \cos B + sen\, A \; sen\, B \cos c.$$

Mediante estos cuatro grupos de Bessel puede calcularse cualquier elemento de un triángulo esférico, a partir de otros tres conocidos.

Los tres elementos conocidos, junto con el que deseamos conocer, son los cuatro elementos que tienen que relacionarse; ellos nos indicarán el grupo al que hay que acudir y la fórmula única, dentro de este grupo, en la que aparecen .

Para cada una de las quince combinaciones cuaternarias posibles entre los seis elementos de un triángulo esférico, existe una y solo una fórmula de Bessel que los relaciona.

FORMULARIO - RESUMEN
GRUPOS DE FÓRMULAS DE BESSEL

Primer grupo: Relaciona los tres lados con un ángulo.

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$
$$\cos b = \cos c \cos a + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} a \cos B$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C$$

Segundo grupo: Relaciona dos lados con sus ángulos opuestos.

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$$

Tercer grupo: Relaciona dos lados con dos ángulos no opuestos.

$$\cot a \operatorname{sen} b = \cos b \cos C + \operatorname{sen} C \cot A$$
$$\cot b \operatorname{sen} c = \cos c \cos A + \operatorname{sen} A \cot B$$
$$\cot c \operatorname{sen} a = \cos a \cos B + \operatorname{sen} B \cot C$$
$$\cot b \operatorname{sen} a = \cos a \cos C + \operatorname{sen} C \cot B$$
$$\cot c \operatorname{sen} b = \cos b \cos A + \operatorname{sen} A \cot C$$
$$\cot a \operatorname{sen} c = \cos c \cos B + \operatorname{sen} B \cot A$$

Cuarto grupo: Relaciona los tres ángulos con un lado.

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$$
$$\cos B = -\cos A \cos C + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos b$$
$$\cos C = -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c$$

Ejercicios resueltos

El cálculo del elemento desconocido de un triángulo esférico no ofrecerá ninguna dificultad si la incógnita puede despejarse y viene dada mediante una razón trigonométrica distinta del seno o de la cosecante . Por ejemplo :

1.- *Calcular el ángulo B de un triángulo esférico del que se conocen los tres lados :*

$$a = 112^\circ\ 24',\ \ b = 69^\circ\ 18',\ \ c = 74^\circ\ 39'.$$

Solución

La fórmula única que relaciona los tres lados con el ángulo B está en el grupo de los cosenos :

$$\cos b = \cos c \cos a + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} a \cos B.$$

Despejamos la incógnita :

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c},$$

$$B = 59^\circ\ 22'.$$

2.- *Calcular el lado c de un triángulo esférico, sabiendo que*

$$A = 73^\circ\ 09',\ \ B = 106^\circ\ 27',\ \ C = 38^\circ\ 20'.$$

Solución

El grupo polar de fórmulas del primero nos proporciona la única que relaciona los tres ángulos con el lado c :

$$\cos C = -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c,$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B},$$

$$c = 40^\circ\ 05'.$$

3.- *Los datos conocidos de un triángulo esférico son los siguientes:*

$$b = 118^\circ\ 37',\ \ c = 74^\circ\ 20',\ \ A = 60^\circ\ 43'.$$

¿Cuánto mide el lado a?

Solución

Los tres lados y el ángulo A aparecen únicamente en la fórmula siguiente del grupo de los cosenos :

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A,$$

$$a = 73^\circ\ 30'.$$

4.- *Calcular el ángulo C de un triángulo esférico, conociendo*
$a = 69° \ 32'$, $c = 116° \ 30'$, $B = 102° \ 07'$.

Solución
La fórmula única que hace intervenir los lados a , c y los ángulos no opuestos B y C pertenece al grupo de las cotangentes :

$$\cot c \ \mathrm{sen}\, a = \cos a \cos B + \mathrm{sen}\, B \cot C;$$

Despejamos la incógnita :

$$\cot C = \frac{\cot c \ \mathrm{sen}\, a - \cos a \cos B}{\mathrm{sen}\, B},$$

$$\boldsymbol{C = 61° \ 04'}.$$

5.- *De un triángulo esférico se conocen :*
$A = 105° \ 47'$, $B = 76° \ 18'$, $c = 110° \ 04'$.
¿Cuánto mide el ángulo C ?

Solución
La fórmula adecuada pertenece al grupo polar del primero

$$\cos C = -\cos A \cos B + \mathrm{sen}\, a \ \mathrm{sen}\, B \cos c,$$

$$\boldsymbol{C = 104° \ 51'}.$$

6.- *Los elementos conocidos de un triángulo esférico son los siguientes :*
$A = 38° \ 12'$, $B = 103° \ 40'$, $c = 117° \ 29'$.
Calcular el lado b .

Solución
El grupo de las cotangentes nos proporciona la fórmula que necesitamos :

$$\cot b \ \mathrm{sen}\, c = \cos c \cos A + \mathrm{sen}\, A \cot B,$$

$$\cot b = \frac{\cos c \cos A + \mathrm{sen}\, A \cot B}{\mathrm{sen}\, c}.$$

La calculadora nos da un valor negativo : - 59° 58' ; la medida de b se obtiene al sumar 180° al resultado obtenido:

$$b = -59° \ 58' + 180° = \mathbf{120° \ 02'}.$$

Debe tenerse en cuenta que la cotangente es una función periódica, de período 180° .

7.- *Calcular el lado c de un triángulo esférico cuyos ángulos miden :*
$A = 123° 47'$, $B = 76° 39'$, $C = 101° 23'$.

Solución
Hallamos la fórmula adecuada en el grupo polar del primero:

$$\cos C = -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c.$$

Despejamos *cos c*:

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B},$$

$$c = \mathbf{113° \; 45{,}6'}.$$

5.6 Resolución de triángulos esféricos

"Resolver" un triángulo esférico significa calcular los lados y ángulos desconocidos utilizando exclusivamente tres elementos conocidos de dicho triángulo.

Ejercicios resueltos

1. *Resolver el triángulo esférico del que se conocen los siguientes elementos:*
a = 112° 38', b = 74° 11', C = 62° 47'.

Solución

Lado c:
$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C$$

$$c = \mathbf{72° \, 28'}.$$

Ángulo A:
$$\cot a \operatorname{sen} b = \cos b \cos C + \operatorname{sen} C \cot A$$

$$\cot A = \frac{\cot a \operatorname{sen} b - \cos b \cos C}{\operatorname{sen} C}$$

$$A = \mathbf{120° \, 35{,}7'}.$$

Ángulo B:
$$\cot b \operatorname{sen} a = \cos a \cos C + \operatorname{sen} C \cot B$$

$$\cot B = \frac{\cot b \operatorname{sen} a - \cos a \cos C}{\operatorname{sen} C}$$

$$B = \mathbf{63° \, 48'}.$$

2. *Se conocen los siguientes elementos de un triángulo esférico:*

$$A = 67^\circ\ 22',\ B = 105^\circ\ 49',\ c = 117^\circ\ 13'.$$

Resolver dicho triángulo.

Solución

Ángulo C: $\cos C = -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c$

$$\boldsymbol{C = 107^\circ 32'}.$$

Lado a: $\cot a \operatorname{sen} c = \cos c \cos B + \operatorname{sen} B \cot A$

$$\cot a = \frac{\cos c \cos B + \operatorname{sen} B \cot A}{\operatorname{sen} c}$$

$$\boldsymbol{a = 59^\circ 24{,}3'}.$$

Lado b: $\cot b \operatorname{sen} c = \cos c \cos A + \operatorname{sen} A \cot B$

$$\cot b = \frac{\cos c \cos A + \operatorname{sen} A \cot B}{\operatorname{sen} c}$$

$$\boldsymbol{b = 116^\circ 12'}.$$

3. *Resolver el triángulo esférico cuyos lados miden :*

$$a = 110^\circ\ 36',\ b = 102^\circ\ 19',\ c = 76^\circ\ 44'.$$

Solución

Ángulo A: $\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$$

$$\boldsymbol{A = 107^\circ 33{,}8'}.$$

Ángulo B:

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c}$$

$$\boldsymbol{B = 97^\circ 55{,}4'}.$$

Ángulo C:

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$$

$$\boldsymbol{C = 80^\circ 43{,}5'}.$$

4. *Resolver el triángulo esférico del que se conocen sus tres ángulos, que miden :*
A = 69° 24', B = 77° 41', C = 103° 16'.

Solución

Lado a:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$$

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}$$

$$a = 72°\,26{,}2'.$$

Lado b:

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}$$

$$b = 82°\,04{,}6'.$$

Lado c:

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}$$

$$C = 99°\,16{,}5'.$$

Ejercicios propuestos

A continuación, se indican ternas de elementos conocidos de varios triángulos esféricos. Resolverlos mediante las fórmulas de Bessel adecuadas en cada caso .

56.- a = 108° 42', b = 79° 27', c = 113° 02'.

a = 65° 23', b = 104° 54', c = 75° 12'.

a = 77° 11', b = 90°, c = 123° 43'.

a = 90°, b = 90°, c = 90°.

57.- a = 112° 37', b = 85° 11', *C* = 76° 21'.

a = 54° 32', b = 120° 33', *C* = 28° 32'.

a = 109° 32', b = 114° 44', *C* = 100° 23'.

b = 78° 32', c = 103° 44', *A* = 112°.

a = 124° 54', c = 32° 44', *B* = 78° 54'.

$a = 76^\circ\ 21'$, $c = 90^\circ$, $B = 87^\circ\ 11'$.

$b = 76^\circ\ 23'$, $c = 102^\circ\ 35'$, $A = 90^\circ$.

58.- $a = 78^\circ\ 45'$, $B = 67^\circ\ 43'$, $C = 74^\circ\ 56'$.

$b = 130^\circ\ 26'$, $A = 78^\circ\ 44'$, $C = 26^\circ\ 21'$.

$c = 125^\circ\ 33'$, $A = 101^\circ\ 21'$, $B = 31^\circ\ 54'$.

$a = 76^\circ\ 38'$, $B = 90^\circ$, $C = 65^\circ\ 49'$.

$c = 110^\circ\ 20'$, $A = 58^\circ\ 25'$, $B = 70^\circ\ 44'$.

59.- $A = 86^\circ\ 21'$, $B = 100^\circ\ 54'$, $C = 74^\circ\ 11'$.

$A = 90^\circ$, $B = 85^\circ\ 15'$, $C = 69^\circ\ 12'$.

$A = 58^\circ\ 25'$, $B = 70^\circ\ 44'$, $C = 90^\circ$.

$A = 90^\circ$, $B = 90^\circ$, $C = 90^\circ$.

60.- El cuarto grupo de Bessel es polar del primero. Demostrar que tanto el segundo como el tercero son autopolares, o polares de si mismos.

Capítulo 6. Fórmulas auxiliares

Las dificultades aparecen si la incógnita viene dada mediante un seno ; en este caso, disponemos de dos valores suplementarios como posibles soluciones . Para decidir si deben aceptarse los dos valores o sólo uno de ellos, necesitamos conocer otras propiedades relativas a los lados y ángulos de un triángulo esférico ; las deduciremos de unas fórmulas notables, las de Briggs y las de Delambre-Gauss.

6.1 Fórmulas de Briggs

Expresan el cos^2, el sen^2 y la tg^2 de la mitad de un ángulo del triángulo esférico, en función de los lados de dicho triángulo :

$$\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{sen\,s\ sen(s-a)}{sen\,b\ sen\,c},$$

$$sen^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{sen(s-b)\ sen(s-c)}{sen\,b\ sen\,c},$$

$$\mathrm{tg}^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{sen(s-b)\ sen(s-c)}{sen\,s\ sen(s-a)}.$$

Demostración
Desarrollaremos únicamente la demostración de la fórmula del cos^2. La demostración de la fórmula para el sen^2 es análoga, y la de la tg^2 se obtiene por cociente de sen^2 y cos^2.

$$\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1+\cos A}{2}, \quad \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{sen\,b\ sen\,c},$$

$$\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{sen\,b\ sen\,c + \cos a - \cos b \cos c}{2\ sen\,b\ sen\,c},$$

$$\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{2\ sen\,b\ sen\,c},$$

$$\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{2\ sen\,s\ sen(s-a)}{2\ sen\,b\ sen\,c},$$

$$\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{sen\,s\ sen(s-a)}{sen\,b\ sen\,c}.$$

Designamos por s el "semiperímetro" del triángulo esférico; esto es :

$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Para la fórmula correspondiente al $sen^2(A/2)$, se parte de la identidad

$$sen^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1 - \cos A}{2}.$$

Y, finalmente, para obtener la expresión de $tg^2(A/2)$, se tiene en cuenta que

$$tg^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{sen^2\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{A}{2}\right)}.$$

6.2 Analogías de Delambre-Gauss

Las fórmulas de Briggs permiten obtener unas proporciones -conocidas como "analogías"- en las que intervienen todos los elementos del triángulo esférico. Las utilizaremos para establecer equivalencias muy útiles entre relaciones con pares de lados del triángulo y relaciones análogas entre los ángulos opuestos.

Son las siguientes:

$$\frac{sen\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}, \qquad \frac{sen\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{sen\frac{a-b}{2}}{sen\frac{c}{2}},$$

$$\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{sen\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}, \qquad \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{sen\frac{C}{2}} = \frac{sen\frac{a+b}{2}}{sen\frac{c}{2}}.$$

Demostración

Indicaremos un esquema de demostración de la primera de las analogías. Es aconsejable que el lector complete los pasos intermedios, e intente demostrar las restantes proporciones de Delambre-Gauss.

$$sen\frac{(A+B)}{2} = sen\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right) = sen\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{A}{2}\,sen\frac{B}{2}.$$

Utilizando las fórmulas de Briggs y efectuando operaciones, resulta :

$$sen\frac{(A+B)}{2} = \cos\frac{C}{2}\cdot\frac{(sen(s-b)+sen(s-a))}{sen\,c}.$$

Finalmente, transformando en producto la suma de senos y sustituyendo *sen c* por $2\,sen\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}$, se obtiene :

$$sen\frac{(A+B)}{2} = \cos\frac{C}{2}\cdot\frac{\cos\frac{(a-b)}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.$$

Las proporciones restantes se demuestran de forma completamente análoga. Obsérvese que las raíces cuadradas que aparecen en las demostraciones son siempre positivas, porque expresan el seno o el coseno de la mitad de un ángulo de un triángulo esférico; al ser este ángulo menor que 180°, su mitad es menor que 90° con lo que todas sus razones trigonométricas son positivas.

Una cualquiera de las proporciones de Delambre puede reproducirse con la siguiente regla mnemotécnica :

Numeradores: A un seno en un miembro le corresponde un signo "menos" en el otro miembro ; a un coseno en un miembro corresponde un signo "más" en el otro miembro.

Denominadores: Los lados tienen la misma razón goniométrica en el numerador y en el denominador, mientras los ángulos tienen razones distintas (seno / coseno).

6.3 Relaciones entre dos lados y sus ángulos opuestos

6.3.1 En todo triángulo esférico se verifican las siguientes equivalencias :

$$a \begin{array}{c}<\\=\\>\end{array} b \iff A \begin{array}{c}<\\=\\>\end{array} B$$

Demostración

La segunda proporción de Delambre establece que :

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{c}{2}}.$$

Los dos denominadores son positivos, por lo que ambos numeradores deben ser del mismo signo, o bien nulos . Ello demuestra las equivalencias indicadas.

Pueden enunciarse diciendo que :

A menor lado se opone menor ángulo, y viceversa.

A lados iguales se oponen ángulos iguales, y viceversa.

A mayor lado se opone mayor ángulo, y viceversa.

6.3.2 En todo triángulo esférico y para todo par de lados y de ángulos opuestos se verifican las siguientes equivalencias:

$$a + b \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} 180^\circ \quad \Leftrightarrow \quad A + B \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} 180^\circ$$

Demostración

En la tercera proporción de Delambre se establece que :

$$\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.$$

Tal como indicábamos en el apartado anterior, los denominadores son positivos, por lo cual los dos numeradores deben ser del mismo signo, o nulos .

Si, por ejemplo, ambos son positivos :

$$\frac{A+B}{2} < 90^\circ \quad y \quad \frac{a+b}{2} < 90^\circ \,;$$

esto es,

$$A+B < 180^\circ \quad y \quad a+b < 180^\circ \,.$$

En cambio, si los dos numeradores son negativos,

$$\frac{A+B}{2} > 90° \quad y \quad \frac{a+b}{2} > 90° \; ;$$

con lo que

$$A+B > 180° \quad y \quad a+b > 180° \, .$$

Finalmente,si los dos numeradores son nulos, se verificará:

$$A+B = 180° \quad y \quad a+b = 180° \, .$$

Ejemplos resueltos

1.- *La información que tenemos sobre un triángulo esférico es la siguiente :*

$$a = 79° \; 48', \; b = 53° \; 12', \; A = 110° \; 02'.$$

¿Cuánto mide el ángulo B?

Solución

Los cuatro elementos que nos interesa relacionar aparecen en una sola de las fórmulas del grupo de los senos :

$$\frac{sen\, a}{sen\, A} = \frac{sen\, b}{sen\, B}.$$

Por consiguiente,

$$sen\, B = \frac{sen\, b \;\, sen\, A}{sen\, a};$$

con lo que obtenemos

$$sen\, B = 0{,}764362.$$

En principio, existen dos posibles ángulos:

$$B_1 = 49° \; 51' \quad y \quad B_2 = 130° \; 09'.$$

El primer valor es el que aparece en la calculadora, y el segundo es el suplementario del primero.

Ahora bien, al ser $a > b$ según los datos, deberá ser también $A > B$; por consiguiente, la única solución es B_1 .

2.- *¿Existe algún triángulo esférico con los datos siguientes?*

$$a = 70° \; 15', \; b = 100° \; 46', \; A = 120° \; 23'.$$

<u>Respuesta</u>

No, porque observamos que se verifica :

$$a < b \quad y \quad a + b < 180°,$$

lo cual implica que se verifiquen desigualdades análogas con los ángulos A y B ; esto es, debería ser :

$$A < B \text{ y } A + B < 180°.$$

Pero las dos desigualdades no pueden cumplirse simultáneamente, puesto que un ángulo mayor que 120° 23′ sumará con él más de 180°.

3.- *Dos triángulos esféricos tienen comunes los elementos siguientes:*

$$a = 51° \, 42', A = 68° \, 39', B = 74° \, 07'.$$

Calcular el lado b en ambos triángulos .

Solución

De la fórmula

$$\frac{sen\, a}{sen A} = \frac{sen\, b}{sen\, B},$$

despejamos *sen b*

$$sen\, b = \frac{sen\, a \; sen\, B}{sen A},$$

$$sen\, b = 0{,}8104309.$$

Las dos posibilidades para *b*

$$b_1 = 54° \; 08' \quad y \quad b_2 = 125° \; 52'$$

son las soluciones buscadas, puesto que tanto una como otra verifican :

$$b > a \text{ y } a + b < 180°.$$

4.- *A partir de las analogías de Delambre adecuadas, calcular los dos ángulos A y B de un triángulo esférico del que se conocen :*

$$a = 123° \, 42', b = 70° \, 11', C = 58° \, 28'.$$

Solución

De las proporciones :

$$\frac{sen \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}},$$

$$\frac{\cos \frac{A+B}{2}}{sen \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}},$$

deducimos, por cociente entre ambas, que :

$$\operatorname{tg}\frac{(A+B)}{2} = \frac{\cos\frac{(a-b)}{2}\cdot\cot\frac{C}{2}}{\cos\frac{(a+b)}{2}}. \qquad (1)$$

Análogamente, de

$$\frac{sen\,\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{sen\,\frac{a-b}{2}}{sen\,\frac{c}{2}},$$

$$\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{sen\,\frac{C}{2}} = \frac{sen\,\frac{a+b}{2}}{sen\,\frac{c}{2}},$$

resulta :

$$\operatorname{tg}\frac{(A-B)}{2} = \frac{sen\,\frac{(a-b)}{2}\cdot\cot\frac{C}{2}}{sen\,\frac{(a+b)}{2}}. \qquad (2)$$

A partir de las igualdades (1) y (2) se calcula

$$\frac{(A+B)}{2} = 94^\circ\ 20',$$

$$\frac{(A-B)}{2} = 39^\circ\ 01'.$$

de donde obtenemos, finalmente

$$A = 133^\circ\ 21',$$
$$B = 55^\circ\ 19'.$$

5.- *Resolver un triángulo esférico del que se conoce :*

$$a = 82^\circ\ 53',\ b = 57^\circ\ 11',\ C = 102^\circ\ 36',$$

utilizando exclusivamente analogías de Delambre.

Solución

Según las fórmulas obtenidas en el ejercicio anterior :

$$\operatorname{tg}\frac{(A+B)}{2} = \frac{\cos\frac{(a-b)}{2}\cdot\cot\frac{C}{2}}{\cos\frac{(a+b)}{2}},$$

$$\frac{(A+B)}{2} = 66° \; 18{,}5'. \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg} \frac{(A-B)}{2} = \frac{sen \frac{(a-b)}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}}{sen \frac{(a+b)}{2}},$$

$$\frac{(A-B)}{2} = 10° \; 40{,}3'. \qquad (2)$$

De (1) y (2) pueden calcularse los ángulos *A* y *B*:

$$\boldsymbol{A = 76° \; 58{,}8',}$$
$$\boldsymbol{B = 55° \; 38{,}2'.}$$

Finalmente, para calcular el lado c , puede utilizarse una cualquiera de las analogías de Delambre . Por ejemplo,

$$\frac{sen \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}},$$

$$\cos \frac{c}{2} = \frac{\cos \frac{(a-b)}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}}{sen \frac{(A+B)}{2}},$$

$$\frac{c}{2} = 48° \; 14{,}9',$$

$$\boldsymbol{c = 96° \; 29{,}8'.}$$

6.- *Calcular los ángulos de un triángulo esférico, cuyos lados miden :*

a = 123° 21', b = 76° 45', c = 100° 02',

mediante las fórmulas de Briggs correspondientes a las tangentes.

Solución

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{sen(s-b) \; sen(s-c)}{sen\, s \; sen(s-a)}},$$

$$\boldsymbol{A = 122° \; 08';}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{B}{2}\right) = \sqrt{\frac{sen(s-a)\ sen(s-c)}{sen\,s\ sen(s-b)}}\ ,$$

$$\boldsymbol{B = 80^\circ\ 39{,}9'};$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{C}{2}\right) = \sqrt{\frac{sen(s-a)\ sen(s-b)}{sen\,s\ sen(s-c)}}\ ,$$

$$\boldsymbol{C = 93^\circ\ 24'}.$$

Ejercicios propuestos

A partir de las analogías de Delambre, resolver los triángulos esféricos correspondientes a cada terna de datos :

61.- b = 106° 25′, c = 64° 07′, A = 61° 28′.

62.- a = 110° 03′, b = 58° 10′, C = 102° 24′.

63.- a = 64° 23′, c = 81° 47′, B = 74° 40′.

64.- Dados los elementos siguientes:

a = 111° 22′, c = 76° 32′, B = 102° 55′,

calcular los ángulos A y C:

a) Con las fórmulas de Bessel.

b) Con las analogías de Delambre.

65.- Calcular el ángulo A de un triángulo esférico conociendo sus tres lados :

a = 104° 33′, b = 82° 11′, c = 96° 54′,

mediante una de las fórmulas de Bessel, y también con una de las fórmulas de Briggs .

66.- De un triángulo esférico se conoce :

a+b = 139° 54′, $A+B$ = 132° 37′, C = 102° 36′.

Resolver dicho triángulo.

67.- Calcular los lados a y b de un triángulo esférico del que se conocen :

A = 76° 21′, B = 103° 23′, c = 112° 44′,

utilizando exclusivamente analogías de Delambre.

68.- Obtener una fórmula que exprese $\cos^2 a/2$ en función de los ángulos del triángulo esférico; designar por S la semisuma $(A+B+C)/2$.

69.- Obtener fórmulas análogas para $\text{sen}^2\, a/2$ y para $\text{tg}^2 a/2$.

70.- Calcular el ángulo C de un triángulo esférico, del que se conocen

$$A = 110^\circ\ 21',\ B = 56^\circ\ 43',\ c = 104^\circ\ 21'.$$

Utilizar las analogías de Delambre.

71.- Resolver, mediante analogías de Delambre, un triángulo esférico del que se conocen:

$$B = 76^\circ\ 18',\ C = 65^\circ\ 11',\ a = 121^\circ\ 22'.$$

72.- Comprobar los resultados del ejercicio anterior, efectuando los cálculos de A , b y c mediante fórmulas de Bessel.

73.- De un triángulo esférico se sabe que :

$$A\text{-}B = 44^\circ\ 37',\ a\text{-}b = 21^\circ\ 54',\ c = 110^\circ\ 33'.$$

Calcular los ángulos A , B y C .

74.- En el ejercicio anterior, calcular los lados a y b .

Capítulo 7. Ángulos auxiliares

7.1 Método del ángulo auxiliar

Para poder calcular los elementos desconocidos mediante cálculo independiente, se necesitará utilizar en algunos casos un ángulo auxiliar, función de los datos iniciales. Ello ocurrirá, por ejemplo, si los datos son :

Dos lados y el *ángulo opuesto* a uno de ellos.

Dos ángulos y el *lado opuesto* a uno de ellos.

Primer caso

1) *Datos*: lados a , b y ángulo A .
Incógnita: lado c .

La fórmula única que relaciona los tres datos con la incógnita es la siguiente :

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A.$$

Si cos b es distinto de cero, dividimos los dos miembros de la igualdad por él :

$$\frac{\cos a}{\cos b} = \cos c + \operatorname{tg} b \operatorname{sen} c \cos A.$$

Introducimos el ángulo auxiliar x - único - definido por :

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} b \cos A, \quad 0^\circ < x < 180^\circ.$$

Con ello, la igualdad anterior se convierte en :

$$\frac{\cos a}{\cos b} = \cos c + \frac{\operatorname{sen} c \operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Y por consiguiente,

$$\frac{\cos a \cos x}{\cos b} = \cos(c-x).$$

De este modo pueden obtenerse dos posibilidades para el ángulo c-x :

$$c - x = \pm y.$$

Y también dos posibilidades para el lado c buscado :

$$c_1 = x + y,\ c_2 = x - y.$$

Atendiendo a las propiedades fundamentales de los elementos de un triángulo esférico, se decidirá si son válidas las dos posibilidades halladas para el lado c , o si sólo es válida una de ellas, o ninguna de las dos .

Puede establecerse un criterio decisorio , comparando el ángulo conocido A con el ángulo B , del que deberá conocerse el cuadrante a que pertenece. En efecto :

$$\cot b \operatorname{sen} c = \cos c \cos A + \operatorname{sen} A \cot B.$$

Si $\cos A$ es no nulo,

$$\frac{\cot b \operatorname{sen} c}{\cos A} - \cos c = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B}.$$

Ahora bien,

$$\frac{\cot b}{\cos A} = \cot x;$$

por consiguiente,

$$\frac{\operatorname{sen} c \cos x - \cos c \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B},$$

$$\frac{\operatorname{sen}(c-x)}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B}.$$

De esta última proporción, y atendiendo a que sen x es un número positivo, deducimos el siguiente criterio :

> *Si A y B pertenecen al mismo cuadrante, el ángulo c - x será positivo (es decir, del primero o segundo cuadrantes) y $c > x$.*
>
> *Si A y B pertenecen a distintos cuadrantes, el ángulo c-x será negativo, con lo que $c < x$.*

Ejemplo 1

De un triángulo esférico se conocen :

$$a = 74^\circ\ 05',\ b = 63^\circ\ 17',\ A = 113^\circ\ 42'$$

¿Cuánto mide el lado c ?

Solución

$$tg\, b \cos A = tg\, x\,,\ \ 0° < x < 180°,$$
$$x = 141°\ 23',$$
$$\frac{\cos a \cos x}{\cos b} = \cos(c-x)\,,\ c-x = \pm 118°\,28.$$

¿Qué signo corresponde a c-x ? ¿Hay dos soluciones?

De la observación de los datos iniciales, deduciremos ya el número máximo de soluciones

$$b < a \longrightarrow B < A,$$
$$a + b < 180° \longrightarrow A + B < 180°.$$

Evidentemente, si $B > 90°$ no se verificará la desigualdad $B + A < 180°$; por consiguiente, debe ser $B < 90°$ y como máximo existe una solución .

De acuerdo con el criterio establecido, al pertenecer A y B a cuadrantes distintos, c-x debe ser un ángulo negativo :

$$c-x = -118°\ 28',\ \ c = 141°\ 23' - 118°\ 28' = 22°\ 55'.$$

En este ejemplo, la posibilidad $c = 141°\ 23' + 118°\ 28' = = 259°\ 51'$ habría que descartarla directamente, por ser mayor que 180° .

El único ángulo B que corresponde a los datos iniciales se calcula mediante la fórmula siguiente, del grupo de los senos :

$$sen\, B = \frac{sen\, b\ sen\, A}{sen\, a}$$

$$B = 58°\, 16'.$$

Observaciones

a) Si $\cos b = 0$ ($b = 90°$) y $\cos A$ es distinto de cero, no será necesario ningún ángulo auxiliar, puesto que la primera fórmula quedará :

$$\cos a = sen\, c \cos A,$$

$$sen\, c = \frac{\cos a}{\cos A}.$$

Por otro lado, de la fórmula

$$\cot b\ sen\, c = \cos c \cos A + sen\, A \cot B,$$

al ser $\cot b = 0$, se deduce que :

$$\cos c = \frac{-\mathrm{tg} A}{\mathrm{tg} B},$$

por lo que

Si A y B pertenecen al mismo cuadrante, c será del segundo cuadrante.
Si A y B pertenecen a distintos cuadrantes, c será del primer cuadrante.

b) Si cos b es distinto de cero, pero cos A es cero (A = 90°) , tampoco necesitaremos ningún ángulo auxiliar, puesto que :

$$\cos a = \cos b \cos c,$$

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}.$$

El lado c queda bien determinado por su coseno .

c) Finalmente, si tanto cos b como cos A son nulos, el lado a necesariamente tendrá que medir 90° , puesto que

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A \longrightarrow \cos a = 0.$$

Si a no mide 90°, no hay solución, no existe ningún triángulo esférico con los elementos iniciales.

Si a = 90° , al ser a=b también será A = B = 90° , pero el lado c y su ángulo opuesto C quedarán indeterminados; existirán infinitos triángulos esféricos con los elementos a = b = A = 90° . Todos estos triángulos tendrán un ángulo B de 90° y el lado c medirá lo mismo que su ángulo opuesto C , como se deduce de que ambos elementos tienen iguales tanto el seno como el coseno, con lo que será c = C .

2) *Datos*: lados a, b y ángulo A.
Incógnita: ángulo C.

Solución

$$\cot a \operatorname{sen} b = \cos b \cos C + \operatorname{sen} C \cot A.$$

Si cos b no es nulo , dividimos por él los dos miembros de la igualdad :

$$\cot a \operatorname{tg} b = \cos C + \operatorname{sen} C \frac{\cot A}{\cos b}.$$

Definimos un ángulo auxiliar - único - mediante una tangente :

$$\frac{\cot A}{\cos b} = \operatorname{tg} z, \qquad 0° < z < 180°.$$

Sustituyendo en la igualdad anterior, se obtiene :

$$\cot a \operatorname{tg} b \cos z = \cos(C-z),$$

$$C-z = \pm t.$$

Existen, pues, dos posibilidades para el ángulo A :

$$C_1 = z + t,\ C_2 = z - t.$$

El criterio para decidir la o las soluciones es el mismo que en el apartado 1) :

Si A y B pertenecen al mismo cuadrante, el ángulo C-z es positivo (C > z).
Si A y B pertenecen a cuadrantes distintos, el ángulo C-z es negativo (C < z) .

En efecto, $\cos B = -\cos A \cos C + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos b$.
Si $\cos A$ es distinto de cero,

$$\frac{\cos B}{\cos A} = -\cos C + \operatorname{sen} C \operatorname{tg} A \cos b.$$

Y al ser

$$\operatorname{tg} A \cos b = \cot z,$$

resulta

$$\frac{\cos B}{\cos A} = \frac{\operatorname{sen}(C-z)}{\operatorname{sen} z}.$$

Al ser sen z > 0, queda el criterio indicado.

Ejemplo 2
Datos: a = 74° 05', b = 63° 17', A = 113° 42'.
Incógnita: C.

Cálculos

$$\frac{\cot A}{\cos b} = \operatorname{tg} z, \qquad 0° < z < 180°$$

$$z = 135°\,41',$$

$$\cot a \operatorname{tg} b \cos z = \cos(C-z),$$

$$C-z = \pm 113°\,55'.$$

Hemos deducido de los datos iniciales que el ángulo B tiene que pertenecer al primer cuadrante ; al ser A y B de distintos cuadrantes, C-z resulta negativo :

$$C - z = -\,113°\ 55',$$
$$\mathbf{C = 21°\ 46'}.$$

También en este ejemplo hubiésemos descartado la posibilidad positiva para C-z porque daba para C un valor mayor que 180° .

Observaciones: Análogas al caso anterior, quedan como ejercicio para el lector .

Segundo caso

1) *Datos*: ángulos A, B; lado a.
Incógnita: ángulo C.

Fórmulas

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a.$$

Si cos B no es cero, dividimos por él los dos miembros de la igualdad :

$$\frac{\cos A}{\cos B} = -\cos C + \operatorname{tg} B \operatorname{sen} C \cos a.$$

Sea m el ángulo -único- definido por :

$$\cot m = \operatorname{tg} B \cos a, \qquad 0° < m < 180°.$$

Sustituyendo en la igualdad anterior :

$$\frac{\cos A}{\cos B} = -\cos C + \frac{\operatorname{sen} C \cos m}{\operatorname{sen} m},$$

$$\frac{\cos A \operatorname{sen} m}{\cos B} = \operatorname{sen}(C-m).$$

En principio, existen dos posibilidades para el ángulo C-m y en consecuencia para el ángulo C :

$$C_1 - m = h, \quad C_1 = m + h;$$

$$C_2 - m = 180° - h, \quad C_2 = m + 180° - h.$$

También en este caso puede establecerse un criterio para decidir cuál de las dos posibilidades es efectivamente solución, comparando el lado conocido <u>a</u> con el lado <u>b</u> , del que se puede conocer previamente el cuadrante o incluso puede calcularse mediante una de las fórmulas del grupo de los senos.

El criterio es el siguiente :

Si el lado <u>a</u> y el lado <u>b</u> pertenecen al mismo cuadrante, el cos(C-m) tiene el mismo signo que el cos m .

Si el lado a *y el lado* b *pertenecen a cuadrantes distintos, el cos(C-m) tiene signo distinto del cos m .*

En efecto,

$$\cot b \; sen\, a = \cos a \cos C + sen\, C \cot B.$$

Si *cos a* es distinto de cero,

$$\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b} = \cos C + sen\, C \operatorname{tg} m$$

porque

$$\operatorname{tg} m = \frac{\cot B}{\cos a}.$$

La igualdad anterior puede escribirse en forma de proporción:

$$\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b} = \frac{\cos(C-m)}{\cos m}.$$

De esta proporción se deduce inmediatamente el criterio enunciado.

La discusión de los casos particulares queda a cargo del lector.

Ejemplo 3
Datos: A = 84° 13′, B = 71°25′, a = 61° 09′.
Incógnita: C.

Cálculos

$$\operatorname{tg} B \cos a = \cot m, \qquad 0° < m < 180°,$$

$$m = 34°52',$$

$$\frac{\cos A \; sen\, m}{\cos B} = sen(C-m),$$

$$C_1 - m = 10°25', \qquad C_2 - m = 169°35'.$$

Análisis del problema

$$B < A \quad y \quad A + B < 180° \longrightarrow b < a, \quad a + b < 180°.$$

El lado b sólo puede pertenecer al primer cuadrante con lo que, al ser a y b del mismo cuadrante, el cos(C-m) tendrá el mismo signo que cos m , esto es, positivo :

$$C - m = 10°25', \quad C = 34°52' + 10°25' = \mathbf{45°17'}.$$

2) *Datos*: ángulos A, B y lado a.
Incógnita: lado c.

Fórmulas

$$\cot a \; sen c = \cos c \cos B + sen B \cot A.$$

Si *cos B* no es nulo,

$$\frac{\cot a \; sen c}{\cos B} = \cos c + \tan B \cot A.$$

Introducimos un ángulo auxiliar único definido por :

$$\cot n = \frac{\cot a}{\cos B}, \quad 0° < n < 180°.$$

Al sustituir en la igualdad precedente, queda :

$$\frac{\cos n \; sen c}{sen n} - \cos c = \mathrm{tg} B \cot A,$$

$$sen(c-n) = \mathrm{tg} B \cot A \; sen n.$$

Hay dos posibilidades para c-n y, por consiguiente, para el lado c :

$$c_1 - n = k, \quad c_1 = n + k;$$

$$c_2 - n = 180° - k, \quad c_2 = n + 180° - k.$$

Comparando los valores de los lados a y b pueden determinarse las soluciones ; sólo tendremos que atender a los cuadrantes a que pertenecen a y b :

Si a y b pertenecen al mismo cuadrante, cos(c-n) y cos n tienen el mismo signo
Si a y b pertenecen a cuadrantes distintos, cos(c-n) y cos n tienen signos contrarios

En efecto,

$$\cos b = \cos a \cos c + sen a \; sen c \cos B.$$

Si *cos a* no es nulo,

$$\frac{\cos b}{\cos a} = \cos c + sen c \; \mathrm{tg} a \cos B,$$

$$\frac{\cos b}{\cos a} = \cos c + sen c \; \mathrm{tg} n,$$

$$\frac{\cos b}{\cos a} = \frac{\cos(c-n)}{\cos n}.$$

De esta última proporción se deduce el criterio enunciado.

Ejemplo 4

Datos: A = 84° 13', B = 71°25', a = 61° 09'.
Incógnita: c.

Cálculos

$$\frac{\cot a}{\cos B} = \cot n, \quad n = 30^\circ 03';$$

$$sen(c-n) = \operatorname{tg} B \cot A \; sen\, n;$$

$$c_1 - n = 8^\circ 40', \quad c_2 - n = 171^\circ 20'.$$

Del estudio de los datos del ejercicio deducimos que el lado b ha de pertenecer al primer cuadrante; por consiguiente, al ser a y b del mismo cuadrante, cos(c-n) tendrá el mismo signo que cos n , o sea positivo .

La única solución es : $c - n = 8^\circ 40', \quad c = 38^\circ 43'.$

Obsérvese por otra parte que la otra posibilidad daría para c un valor mayor que 180°, por lo que debe descartarse.

7.2 Ejercicios con dos soluciones

Los criterios que se han ido estableciendo cobran todo su interés en los casos en que existen efectivamente dos triángulos esféricos que comparten los datos iniciales, puesto que permiten seleccionar y separar las dos soluciones.

Ejemplos

1) *Dos triángulos esféricos tienen los siguientes elementos comunes :*
a = 51° 42', A = 68° 39', B = 74° 07'.
Calcular los restantes elementos en cada triángulo.

Solución

$$sen\, b = \frac{sen\, a \; sen\, B}{sen\, A},$$

$$b_1 = 54^\circ 08', \quad b_2 = 125^\circ 52'.$$

Los dos valores de b verifican : $b>a$ y $a+b<180°$, igual que sus respectivos ángulos opuestos.

$$\cot y = \operatorname{tg} B \cos a\ ,\quad 0° < y < 180°\ ;\quad y = 24° 39';$$

$$\operatorname{sen}(C-y) = \frac{\cos A\ \operatorname{sen} y}{\cos B};$$

$$C_1 - y = 33°\ 42',\quad C_1 = 58°\ 21';$$

$$C_2 - y = 146°\ 18',\quad C_2 = 170°\ 57'.$$

Finalmente,

$$\cot x = \frac{\cot a}{\cos B},\quad x = 19°\ 07';$$

$$\operatorname{sen}(c-x) = \frac{\operatorname{tg} B\ \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} A};$$

$$c_1 - x = 26°\ 44',\quad c_1 = 45°\ 51';$$

$$c_2 - x = 153°\ 16',\quad c_2 = 172°\ 23'.$$

Al considerar la solución b_1 , que pertenece al mismo cuadrante que el lado conocido a, el cos(C-y) será del mismo signo que el cos y , así como el cos (c-x) del mismo signo que cos x . Por consiguiente, los elementos de uno de los triángulos solución serán :

$$a,\ A,\ B,\ b_1,\ C_1,\ c_1.$$

Y los elementos del otro triángulo :

$$a,\ A,\ B,\ b_2,\ C_2,\ c_2.$$

2) *Existen dos triángulos esféricos con los siguientes datos :*

$$b = 116°\ 01',\ c = 69°\ 39',\ B = 120°\ 40'.$$

Calcular los elementos restantes de cada triángulo.

Solución

2.1)

$$\operatorname{sen} C = \frac{\operatorname{sen} B\ \operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} b};$$

$$C_1 = 63°\ 49',\quad C_2 = 116°\ 11'.$$

2.2)

$$\cos b = \cos a \cos c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos B;$$

$$\operatorname{tg} c \cos B = \operatorname{tg} x, \quad x = 126^\circ\ 01';$$

$$\cos(a-x) = \frac{\cos b \cos x}{\cos c}, \quad a-x = \pm 42^\circ\ 07';$$

$$a_1 = 168^\circ\ 08', \quad a_2 = 83^\circ\ 54'.$$

2.3)

$$\cot b \operatorname{sen} c = \cos c \cos A + \operatorname{sen} A \cot B;$$

$$\frac{\cot B}{\cos c} = \operatorname{tg} y, \quad y = 120^\circ\ 23';$$

$$\cos(A-y) = \frac{\operatorname{tg} c \cos y}{\operatorname{tg} b}, \quad A-y = \pm 48^\circ\ 16';$$

$$A_1 = 168^\circ\ 39', \quad A_2 = 72^\circ\ 07'.$$

Discusión

Si consideramos la solución C_1 , que pertenece a distinto cuadrante que el ángulo conocido B , entonces a-x y A-y serán negativos, con lo que el triángulo tendrá los elementos siguientes :

$$b,\ c,\ B,\ C_1,\ a_2,\ A_2.$$

En cambio, al tomar la solución C_2 , los ángulos B y C_2 serán del mismo cuadrante, con lo que a-x y A-y deberán tomarse positivos ; por consiguiente, el triángulo estará formado por :

$$b,\ c,\ B,\ C_2,\ a_1,\ A_1.$$

Ejercicios propuestos

En cada uno de los ejercicios debe razonarse en primer lugar si puede o no existir algún triángulo con los datos del enunciado. En caso afirmativo, calcúlense los elementos restantes

75.- $a = 63^\circ\ 25'$, $b = 78^\circ\ 14'$, $A = 40^\circ\ 09'$.

76.- $a = 132^\circ\ 09'$, $b = 56^\circ\ 20'$, $B = 95^\circ$.

77.- $b = 103^\circ\ 21'$, $c = 71^\circ\ 32'$, $C = 77^\circ\ 12'$.

78.- $a = 76^\circ\ 32'$, $c = 112^\circ\ 21'$, $C = 100^\circ\ 34'$.

79.- $A = 118° 43'$, $B = 100° 21'$, $a = 132° 21'$.

80.- $A = 47° 54'$, $B = 132° 11'$, $b = 104° 34'$.

81.- $b = 71° 34'$, $c = 88° 14'$, $B = 66° 33'$.

82.- $B = 111° 22'$, $C = 74° 56'$, $c = 83° 22'$.

83.- $A = 108° 11'$, $C = 99° 18'$, $a = 113° 23'$.

84.- $a = 77° 32'$, $c = 65° 21'$, $A = 100° 29'$.

85.- $b = 76° 55'$, $B = 82° 54'$, $C = 66° 44'$.

86.- $a = 112° 43'$, $b = 76° 44'$, $A = 90°$.

87.- $a = 90°$, $c = 111° 22'$, $C = 90°$.

88.- $a = 56° 33'$, $c = 78° 54'$, $C = 78° 43'$.

89.- $b = 90°$, $B = 27° 34'$, $a = 100°$.

90.- $a = 77° 15'$, $b = 102°$, $A = 66° 40'$.

91.- $b = 38° 17'$, $c = 72° 20'$, $B = 77°$.

92.- $b = 88° 12'$, $c = 73° 11'$, $C = 100° 23'$.

93.- $A = 106° 33'$, $B = 88° 11'$, $b = 72° 11'$.

Capítulo 8. Resolución de triángulos esféricos rectángulos

8.1 Triángulos esféricos rectángulos

Se llama triángulo esférico *rectángulo* al que tiene *un solo* ángulo recto . En este caso, las fórmulas de Bessel en las que interviene dicho ángulo se simplifican notablemente. Si, por ejemplo, el ángulo A es el recto, las fórmulas simplificadas son las siguientes :

Primer grupo

$$\cos a = \cos b \cos c. \tag{1}$$

Segundo grupo

$$sen\, a = \frac{sen b}{sen B}, \quad sen b = sen a\; sen B; \tag{2}$$

$$sen\, a = \frac{sen c}{sen C}, \quad sen c = sen a\; sen C. \tag{3}$$

Tercer grupo

$$\begin{gathered} \cot a\; sen c = \cos c \cos B, \\ \cos B = \cot a\; \mathrm{tg}\, c; \end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered} \cot a\; sen b = \cos b \cos C, \\ \cos C = \cot a\; \mathrm{tg}\, b; \end{gathered} \tag{5}$$

$$\cot b\; sen c = \cot B, \tag{6}$$

$$sen c = \mathrm{tg}\, b \cot B;$$

$$\cot c \; sen\, b = \cot C,$$

$$sen\, b = \operatorname{tg} c \; \cot C.$$

Cuarto grupo

$$0 = -\cos B \cos C + sen\, B \; sen\, C \cos a,$$

$$\cos a = \cot B \cot C. \tag{8}$$

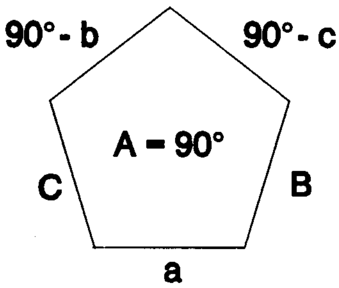
Análogamente

$$\cos B = sen\, C \cos b, \tag{9}$$

$$\cos C = sen\, B \cos c. \tag{10}$$

8.2 Regla del pentágono

Cualquiera de las diez fórmulas anteriores puede obtenerse mediante una sencilla regla mnemotécnica, conocida como *regla del pentágono* . Se basa en el siguiente esquema, en el que se han situado los lados y ángulos del triángulo rectángulo, distintos del ángulo recto, A :



El enunciado de la regla práctica es :

El coseno de un elemento cualquiera del pentágono es igual al producto de los senos de los dos elementos opuestos , o bien al producto de las cotangentes de los dos elementos adyacentes .

Por ejemplo,

$$\cos a = sen(90° - b)\; sen(90° - c) = \cos b \cos c,$$

$$\cos a = \cot B \cot C.$$

Dados tres elementos del triángulo rectángulo, pueden presentarse dos posibilidades:

a) Los tres elementos quedan *consecutivos* en el pentágono ; en este caso, el *coseno* del elemento *central* es igual al producto de las *cotangentes* de los otros dos.

b) Los tres elementos *no quedan situados consecutivamente* ; entonces, el *coseno* del que ha quedado separado es igual al producto de los *senos* de los otros dos .

8.3 Propiedades fundamentales de los triángulos esféricos rectángulos

** La "hipotenusa" de un triángulo esférico rectángulo no puede medir 90° .*

En efecto,

$$\cos a = \cot B \cot C.$$

Al ser distintas de cero las cotangentes de B y de C , por ser estos ángulos distintos de 90° (recuérdese que el ángulo A es el *único* ángulo recto del triángulo) , también es distinto de cero el coseno del lado a (la "hipotenusa") ; por consiguiente, a no puede medir 90° .

** Los "catetos" de un triángulo esférico rectángulo no pueden medir 90° .*

Puesto que, al ser $$\cos a = \cos b \cos c,$$

si b o c (los "catetos") midiesen 90° , su coseno valdría cero, y también sería cero el cos a , en contra de la primera propiedad demostrada.

** El número de lados de un triángulo esférico rectángulo que pertenecen al primer cuadrante es siempre impar (1 o 3).*

Se deduce inmediatamente de la fórmula anterior :

$$\cos a = \cos b \cos c.$$

** El seno de un cateto es menor que el seno de la hipotenusa .*

En efecto, esta propiedad se desprende de la igualdad :

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B,$$

puesto que $0 < \operatorname{sen} B < 1$.

Análogamente ocurre con el lado c :

$$\operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C \text{ , con } 0 < \operatorname{sen} C < 1.$$

** Cada cateto pertenece al mismo cuadrante que su ángulo opuesto .*

Puesto que

$$\operatorname{sen} c = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B}$$

y sen c es un número positivo , con lo que tg b y tg B deben ser del mismo signo .

** Si un cateto pertenece al primer cuadrante, es menor que su ángulo opuesto ; en cambio, si pertenece al segundo cuadrante, es mayor que dicho ángulo opuesto .*

Porque al ser

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B,$$

debe verificarse siempre que

$$\operatorname{sen} b < \operatorname{sen} B \quad (0 < \operatorname{sen} a < 1) .$$

** Los ángulos B y C de un triángulo esférico rectángulo en A , verifican las desigualdades siguientes :*

$$90° < B + C < 270°;\ B - C < 90°.$$

De las desigualdades

$$180° < A + B + C, \quad B + C - A < 180°,$$

se deduce, al ser $A = 90°$:

$$90° < B + C < 270°.$$

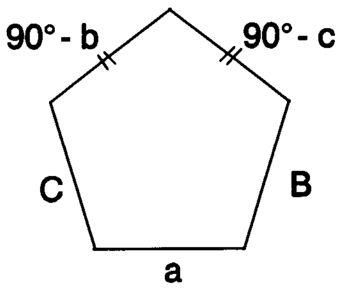
Y de $A + B - C < 180°$ obtenemos $B - C < 90°$.

Ejercicios resueltos

1.- *Calcular los elementos que faltan en un triángulo esférico rectángulo ($A = 90°$) del que se conocen los catetos :*

$$b = 75°\ 47', \quad c = 102°\ 38'.$$

Solución



a) $\cos a = \cos b \cos c$; $\boldsymbol{a = 93°05'}$.

b) $sen\, a = \operatorname{tg} b \cot B$,

$$\cot B = \frac{sen\, c}{\operatorname{tg} b},$$

$\boldsymbol{B = 76°\,07'}$.

c) $sen\, b = \operatorname{tg} c \cot C$,

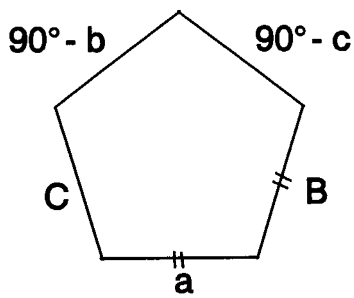
$$\cot C = \frac{sen\, b}{\operatorname{tg} c},$$

$\boldsymbol{C = 102°\,15'}$.

2.- *Calcular los elementos restantes de un triángulo esférico rectángulo ($A = 90°$), del que se conocen :*

$$a = 118°\ 23', \quad B = 74°\ 15'.$$

Solución



a) $sen\, b = sen\, a\ sen\, B$, $\boldsymbol{b = 57°\,52'}$.

Téngase en cuenta que el lado b debe pertenecer al mismo cuadrante que su ángulo opuesto B ; por consiguiente, no hay más que una solución .

b) $\cos B = \operatorname{tg} c \cot a, \quad \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B;$

$$c = 153° 20'.$$

c) $\cos a = \cot B \cot C, \quad \cot C = \cos a \operatorname{tg} B;$

$$C = 149° 19'.$$

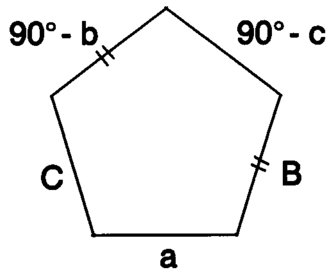
3.- *Hay dos triángulos esféricos rectángulos (A = 90°) con b = 112° 38′ y B = 100° 49′. Calcular sus elementos.*

Solución

a) $$sen\, c = \operatorname{tg} b \cot B,$$
$$c_1 = 27° 1', \quad c_2 = 152° 44'.$$

b) $$sen\, b = sen\, a\; sen\, B,$$
$$sen\, a = \frac{sen\, b}{sen\, B},$$
$$a_1 = 70°, \quad a_2 = 110°.$$

c) $$\cos B = \cos b\; sen\, C,$$
$$sen\, C = \frac{\cos B}{\cos b},$$
$$C_1 = 29° 11', \quad C_2 = 150° 49'.$$



Atendiendo a las propiedades de los triángulos esféricos rectángulos, los dos triángulos que comparten los datos iniciales son los que tienen los elementos siguientes :

1) a_1, b, c_2, B, C_2.

2) a_2, b, c_1, B, C_1.

Ejercicios propuestos

Resolver los triángulos esféricos rectángulos (A = 90°) que tienen los siguientes elementos conocidos :

94.- B = 106° 23′, C = 74° 12′.

95.- B = 49° 45′, C = 76° 21′.

96.- b = 76° 09', c = 112° 37'.

97.- b = 64° 11', c = 88° 01'.

98.- a = 75° 54', b = 60° 22'.

99.- a = 80° 17', c = 54° 33'.

100.- a = 113° 20', c = 44° 21'.

101.- a = 81° 23', c = 100° 32'.

102.- a = 120° 45', B = 76° 11'.

103.- a = 75° 32', C = 88° 10'.

104.- b = 66° 15', B = 78° 12'.

105.- b = 110° 21', B = 100° 43'.

106.- c = 38° 19', C = 84° 33'.

107.- c = 121°, C = 104° 43'.

108.- a = 45° 23', c = 104° 21'.

109.- a = 124° 54', C = 100°.

110.- b = 113° 21', C = 82° 33'.

111.- B = 132° 45', c = 76° 38'.

112.- c = 133° 54', B = 76° 44'.

113.- b = 142° 11', B = 120° 55'.

114.- En un triángulo esférico rectángulo (A = 90°) se verifica que a+b > 180°. ¿A qué cuadrante pertenece el ángulo B de dicho triángulo?

115.- En un triángulo esférico rectángulo, ¿puede ser un cateto mayor que la hipotenusa? Si a= 112° 35', ¿entre qué valores debe estar comprendido el cateto b?

116.- Justificar que los tres lados siguientes no pueden ser los de un triángulo esférico rectángulo :

$$a = 107^\circ\ 28',\ b = 54^\circ\ 33',\ c = 70^\circ\ 45'.$$

117.- Si los dos catetos de un triángulo esférico rectángulo son del mismo cuadrante, ¿ a qué cuadrante pertenecerá la hipotenusa?

118.- La hipotenusa de un triángulo esférico rectángulo pertenece al segundo cuadrante. ¿Qué podemos asegurar sobre los cuadrantes a que pertenecen los dos catetos?

119.- Un triángulo esférico con un solo lado recto recibe el nombre de *rectilátero* . Si este lado es a , demostrar las diez igualdades siguientes :

$$\cos b = \operatorname{sen} c \cos B$$

$$\cos c = \operatorname{sen} b \cos C$$

$$\cos A = -\cot b \cot c$$

$$\operatorname{sen} B = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A$$

$$\operatorname{sen} C = \operatorname{sen} c \operatorname{sen} A$$

$$\cos b = -\operatorname{tg} C \cot A$$

$$\cos c = -\operatorname{tg} B \cot A$$

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} b \operatorname{sen} C$$

$$\operatorname{tg} C = \operatorname{tg} c \operatorname{sen} B$$

$$\cos A = -\cos B \cos C$$

120.- Demostrar que ninguno de los ángulos de un triángulo esférico rectilátero puede medir 90°.

121.- ¿Pueden pertenecer al segundo cuadrante los tres ángulos de un triángulo esférico rectilátero?

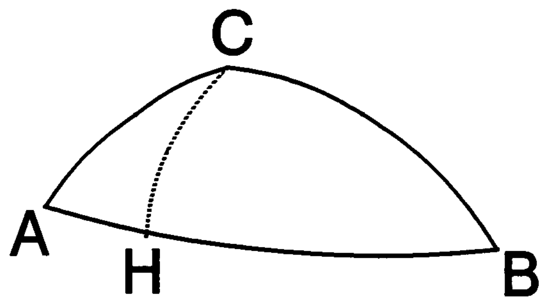
122.- Demostrar que, en un triángulo esférico rectilátero, un lado no recto y su ángulo opuesto pertenecen simultáneamente al mismo cuadrante.

123.- Supongamos un triángulo esférico rectilátero, con $a = 90^\circ$. Si b y B son del primer cuadrante, ¿cuál debe ser menor? ¿Y si ambos pertenecen al segundo cuadrante? Justificar las respuestas.

124.- ¿Podría enunciarse una regla menmotécnica parecida a la del pentágono, para triángulos esféricos rectiláteros?

Capítulo 9. Descomposición en triángulos esféricos rectángulos

9.1 Método del perpendículo



El arco de circunferencia máxima CH es una "altura esférica" o "perpendículo" del triángulo esférico ABC .

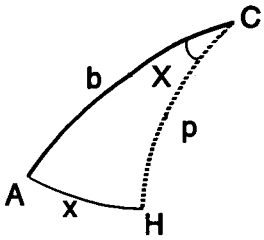
Descomponiendo un triángulo esférico cualquiera en dos triángulos rectángulos mediante un perpendículo adecuado, puede resolverse el primer triángulo resolviendo sucesivamente los dos triángulos esféricos rectángulos.

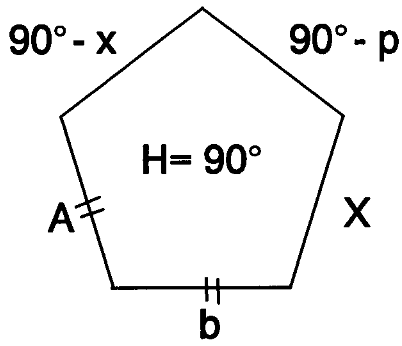
Ejemplos

1) Datos iniciales:

$$A = 84^\circ\ 27',\ b = 54^\circ\ 11',\ c = 104^\circ\ 23'.$$

Consideremos los dos triángulos rectángulos que determina el perpendículo CH . Del triángulo CHA se conoce la hipotenusa (b) y un ángulo (A) :



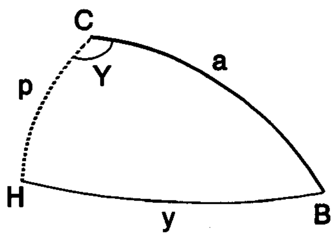


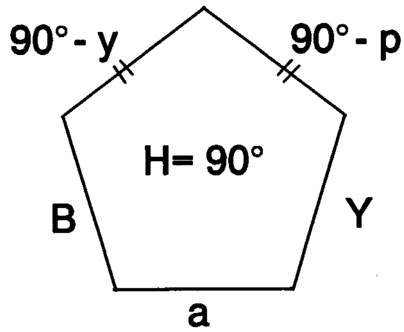
a) $\operatorname{sen} p = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} b, \quad p = 53^\circ 49'$;

b) $\cos A = \operatorname{tg} x \cot b, \quad \operatorname{tg} x = \cos A \operatorname{tg} b, \quad x = 7^\circ 38'$;

c) $\cos b = \cot A \cot X, \quad \cot X = \cos b \operatorname{tg} A, \quad X = 9^\circ 26'$.

A continuación resolvemos el triángulo rectángulo CHB del que se conocen los catetos p y HB = c - x = y .





a) $\cos a = \cos p \cos y, \quad a = 93^\circ 59'$;

b) $\operatorname{sen} y = \cot B \operatorname{tg} p, \quad B = 54^\circ$;

c) $\operatorname{sen} p = \cot Y \operatorname{tg} y, \quad Y = 95^\circ 27'$.

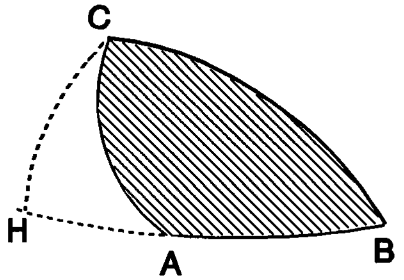
Reuniendo los resultados de ambos triángulos, quedará resuelto el triángulo inicial ABC

$$a = 93^\circ 59', \quad B = 54^\circ, \quad C = X + Y = 104^\circ 53'.$$

2) Datos iniciales:

$$b = 51° \, 08', \; c = 49° \, 27', \; A = 118° \, 42'.$$

Resolución



Del triángulo rectángulo CHA se conocen la hipotenusa b y el ángulo $A' = 180° - A$.

a) $\operatorname{sen} p = \operatorname{sen} A' \operatorname{sen} b,$

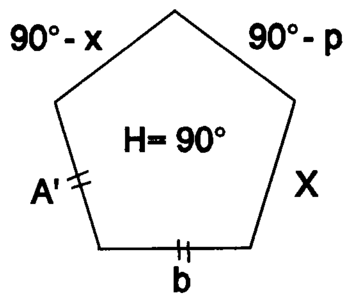
$p = 43° \, 04'.$

b) $\cos A' = \operatorname{tg} x \cot b,$

$x = 30° \, 47'.$

c) $\cos b = \cot A' \cot X,$

$X = 41° \, 06'.$



Del triángulo rectángulo CHB se conocen los dos catetos, p y $z = x + c$. Por consiguiente :

a) $\cos a = \cos p \cos z,$

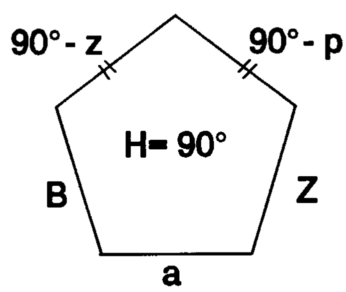
$a = 82° \, 53'.$

b) $\operatorname{sen} z = \cot B \operatorname{tg} p,$

$B = 43° \, 29'.$

c) $\operatorname{sen} p = \cot Z \operatorname{tg} z,$

$Z = 83° \, 18'.$



De este modo, una vez resueltos los dos triángulos esféricos rectángulos CHA y CHB queda resuelto el triángulo inicial ABC :

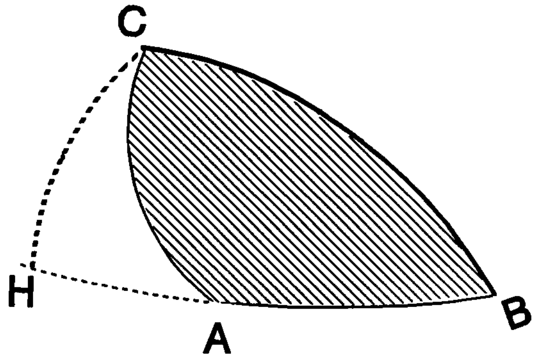
$$a = 82°\,53',\quad B = 43°\,29',\quad C = Z - X = 42°\,12'.$$

3) Datos iniciales:

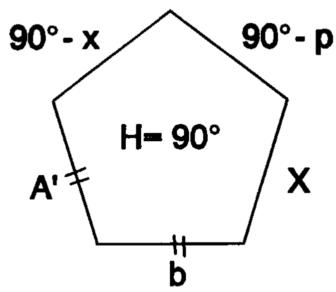
$$A = 118°\ 37',\ B = 70°\ 25',\ b = 76°\ 40'.$$

Resolución

En un primer análisis, observamos que al ser $A>B$ y $A+B> 180°$, también debe verificarse que $a>b$ y $a+b>180°$;
por consiguiente, el lado <u>a</u> ha de pertenecer al segundo cuadrante .



Del triángulo rectángulo CHA se conocen la hipotenusa b y el ángulo $A' = 180° - A$.



a) $$\operatorname{sen} p = \operatorname{sen} A' \operatorname{sen} b,$$

$$p = 58°\,40'.$$

Téngase presente que p tiene que pertenecer al mismo cuadrante que su ángulo opuesto A′.

b) $$\cos b = \cot A' \cot X,$$

$$X = 67°\,05'.$$

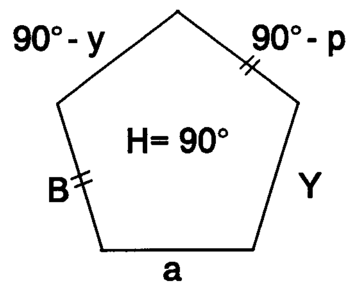
c) $$\cos A' = \cot b \operatorname{tg} x,$$

$$x = 63°\,40'.$$

Pasemos ahora al triángulo rectángulo CHB del que se conoce el cateto p y su ángulo opuesto B :

a) $sen\,p = sen\,a\; sen\,B,$

$a = 114°\,58'.$



Recuérdese que el lado a debe pertenecer al segundo cuadrante.

b) $sen\,y = \mathrm{tg}\,p\; \cot B,$

$y = 144°\,15'.$

Al pertenecer a al segundo cuadrante y p al primero, el cateto y debe pertenecer necesariamente al segundo cuadrante, según las propiedades particulares de los triángulos esféricos rectángulos.

c) $\cos B = sen\,Y \cos p,$

$Y = 139°\,52'.$

El ángulo Y ha de pertenecer al mismo cuadrante que su lado opuesto.

Utilizando los resultados que se han ido obteniendo, se pueden calcular los elementos que faltaban en el triángulo inicial:

$$a = 114°\ 58',\ c = 80°\ 35',\ C = 72°\ 47'.$$

Ejercicios propuestos

125.- Utilizando un perpendículo y los dos triángulos esféricos que origina, resolver el triángulo esférico ABC del que se conoce :

$$A = 63°\ 27',\ B = 75°\ 09',\ c = 112°\ 06'.$$

126.- Utilizando sólo triángulos rectángulos, resolver el triángulo esférico ABC del que se conoce :

$$a = 112°\ 37',\ b = 70°\ 32',\ C = 110°\ 04'.$$

127.- De un triángulo esférico se conocen :

$$a = 58°\ 43',\ c = 78°\ 29',\ A = 40°\ 12'.$$

Resolver el triángulo, descomponiéndolo mediante un perpendículo en dos triángulos esféricos rectángulos.

128.- Resolver por el método del perpendículo el triángulo esférico del que se conoce :

$$A = 100^\circ\ 47',\ B = 49^\circ\ 25',\ a = 118^\circ\ 04'.$$

129.- Si se resuelven los triángulos esféricos de los dos ejercicios precedentes mediante cálculos independientes, se necesitarán unos ángulos auxiliares. Averiguar el significado geométrico de cada uno de ellos, mediante un perpendículo adecuado.

130.- De un triángulo esférico ABC se conoce :

$$a = 130^\circ\ 45',\ c = 76^\circ\ 32',\ B = 58^\circ\ 12'.$$

Calcular los elementos restantes

a) Por cálculos independientes.

b) Por el método del perpendículo.

131.- De un triángulo esférico se conocen los datos siguientes:

$$a = 90^\circ,\ b = 76^\circ\ 33',\ c = 112^\circ\ 05'.$$

Es un triángulo "rectilátero", porque de los tres lados sólo uno de ellos es recto.

Su triángulo polar es rectángulo. Resolver este triángulo, y utilizar los resultados para resolver el triángulo esférico inicial.

132.- Utilizar el triángulo polar para resolver el triángulo esférico del que se conocen los datos siguientes :

$$b = 113^\circ\ 21',\ c = 90^\circ,\ A = 77^\circ\ 54'.$$

133.- De un triángulo esférico se conoce :

$$a = 114^\circ\ 32',\ b = 90^\circ,\ C = 79^\circ\ 44'.$$

Resolverlo:

a) Mediante cálculos independientes.

b) Por el método del perpendículo.

c) Utilizando el triángulo rectángulo polar.

134.- Resolver un triángulo esférico del que se conocen los elementos siguientes:

$$a = 76^\circ\ 32',\ b = 85^\circ\ 11',\ A = 57^\circ\ 43'.$$

Utilitzar:

a) El cálculo independiente.

b) El método del perpendículo.
c) El triángulo esférico polar.

135.- Resolver por los tres métodos del ejercicio anterior, un triángulo esférico del que se conocen :

$$b = 114^\circ\ 54',\ c = 76^\circ\ 33',\ A = 66^\circ\ 11'.$$

Ejercicios de recapitulación

1.- Los lados de un triángulo esférico miden :

$$a = 110^\circ\ 23',\ b = 78^\circ\ 54',\ c = 100^\circ\ 32'.$$

Calcular los tres ángulos :

a) Por cálculo independiente, utilizando sólo fórmulas de Bessel.

b) Por cálculo independiente, utilizando sólo fórmulas de Briggs.

2.- Conocidos los tres ángulos de un triángulo esférico :

$$A = 76^\circ\ 12',\ B = 103^\circ\ 21',\ C = 54^\circ\ 11',$$

calcular los tres lados :

a) Por cálculo independiente, mediante las fórmulas de Bessel adecuadas.

b) Con cálculos independientes que utilicen sólo fórmulas de Briggs.

3.- De un triángulo esférico se conocen los elementos siguientes

$$a = 121^\circ\ 32',\ c = 65^\circ\ 11',\ B = 67^\circ\ 38'.$$

Resolver el triángulo:

a) Con cálculos independientes y fórmulas de Bessel.

b) Con cálculos "sucesivos", utilizando sólo analogías de Delambre.

c) Por descomposición en triángulos rectángulos (método del perpendículo).

4.- Resolver un triángulo esférico del que se conocen :

$$A = 67^\circ\ 22',\ B = 76^\circ\ 43',\ c = 124^\circ\ 54'.$$

a) Con cálculos independientes y fórmulas de Bessel.
b) Con cálculos "sucesivos" a partir de analogías de Delambre.
c) Por el método del perpendículo .

5.- Analizar si puede existir algún triángulo esférico con los siguientes elementos:

$$b = 100^\circ\ 18',\ c = 53^\circ\ 21',\ B = 98^\circ\ 34'.$$

Si existe, resolverlo :

a) Con fórmulas de Bessel y ángulos auxiliares.

b) Con cálculos sucesivos en los que intervengan las analogías de Delambre.

c) Por descomposición en triángulos rectángulos (método del perpendículo) .

6.- Estudiar la existencia de algún triángulo esférico con los siguientes datos :

$$A = 87^\circ\ 11',\ B = 76^\circ\ 37',\ b = 60^\circ\ 22'.$$

En caso afirmativo, resolverlo :

a) Con fórmulas de Bessel y ángulos auxiliares.

b) Con cálculos sucesivos en los que se utilice alguna analogía de Delambre.

c) Por el método del perpendículo .

7.- Se dispone de los datos siguientes relativos a los elementos de un triángulo esférico:

$$C = 70^\circ,\ A+B = 182^\circ,\ \text{perímetro} = 250^\circ.$$

Calcular los elementos desconocidos de dicho triángulo.

8.- Calcular los elementos desconocidos de un triángulo esférico del que se conoce :

$$b+c = 174^\circ 23',\ a = 60^\circ\ 40',\ \text{exceso esférico} = 76^\circ\ 47'.$$

9.- Resolver un triángulo esférico del que se sabe que :

$$a = 76^\circ\ 23',\ A+B = 180^\circ,\ C = 62^\circ\ 28'.$$

10.- Resolver un triángulo esférico del que se conoce :

$$\text{perímetro} = 235^\circ\ 03',\ \text{exceso esférico} = 76^\circ\ 32',\ A = 74^\circ\ 21'.$$

RESUMEN

Utilización de los grupos de Bessel en el cálculo "independiente"

Primer grupo de Bessel

Deberá utilizarse alguna de las fórmulas de este primer grupo -el de los cosenos- siempre que se deseen relacionar los tres lados de un triángulo esférico con uno de sus ángulos. Por ejemplo, en los casos siguientes:

Datos:	a, b, c	*Incógnita:*	A
	a, b, C		c
	a, b, A		c

Segundo grupo de Bessel

Si interesa relacionar dos lados de un triángulo esférico con los dos ángulos opuestos, habrá que manejar una de las fórmulas del segundo grupo de Bessel -grupo de los senos-. Por ejemplo:

Datos:	a, b, A	*Incógnita:*	B
	a, B, A		b

Tercer grupo de Bessel

En caso de que deban intervenir dos lados del triángulo esférico y dos ángulos, pero no los opuestos a dichos lados, tendrá que buscarse la fórmula apropiada en el tercer grupo de Bessel -el de las cotangentes-. Así por ejemplo :

Datos:	a, b, A	*Incógnita:*	C
	a, b, C		A
	a, B, C		b
	a, A, B		c

Cuarto grupo de Bessel

Finalmente, puede ser preciso relacionar los tres ángulos de un triángulo esférico con uno de sus lados, en cuyo caso la fórmula adecuada se hallará en el cuarto grupo de Bessel, polar del primero. Ejemplos :

Datos:	A, B, C	*Incógnita:*	a
	A, B, c		C
	A, B, a		C

En cualquier caso, queda perfectamente determinado el grupo de fórmulas de Bessel que relaciona los cuatro elementos que desemos. Una vez situado el grupo, habrá que seleccionar la fórmula -única- que conviene a los datos e incógnita concretos del ejercicio. Y, por fin, deberá despejarse la incógnita para proceder a su cálculo ; en ocasiones este despeje no es inmediato, por lo que es conveniente utilizar un ángulo auxiliar.

COMPLEMENTOS Y APLICACIONES

Anexo 1

Diedro convexo

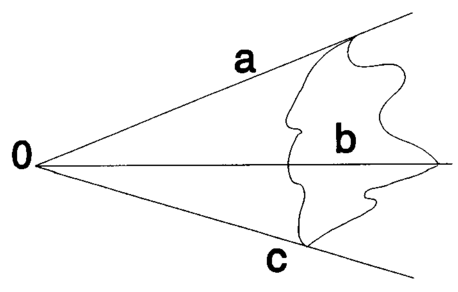
Dados dos semiplanos a y b con un borde común r pero situados en planos distintos, se llama *diedro convexo* al conjunto de puntos de intersección de los semiespacios determinados por los planos de a y b que contienen, respectivamente, los semiplanos b y a .

La recta r se llama *arista* del diedro, y los semiplanos a y b son las *caras* del mismo.

La sección producida en un diedro por un plano perpendicular a la arista es un ángulo plano que recibe el nombre de *sección recta* del diedro. Sus lados son perpendiculares a la arista del diedro, y su medida se toma como medida del ángulo diedro ; siempre es menor que un ángulo llano.

Triedro convexo

Dadas tres semirrectas no coplanarias a, b, c concurrentes en el punto O, se llama *triedro convexo* el conjunto de puntos de intersección de los semiespacios determinados por los planos ab, ac, y bc que contienen a la semirrecta restante.

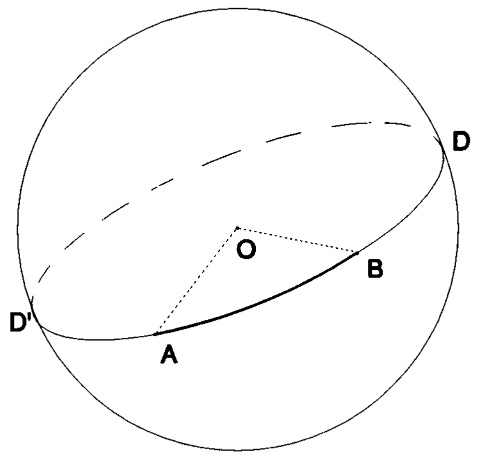


Cada semirrecta recibe el nombre de *arista* del triedro; cada ángulo convexo ab, bc y ca es una *cara* del triedro, y el punto O es el *vértice* del mismo.

La suma de las tres caras del triedro es menor que cuatro rectos.

Anexo 2

Distancia esférica. Ángulo esférico



Dados dos puntos A y B de una superficie esférica de centro O , se llama *distancia esférica* entre ambos al menor de los arcos que determinan en la circunferencia máxima que pasa por ellos; esta circunferencia máxima es la intersección de la superficie esférica y el plano determinado por los tres puntos A , B y O .

La medida de la distancia AB es la del ángulo plano AOB.

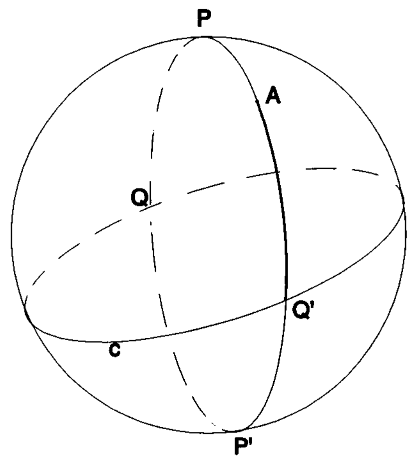
Dos circunferencias máximas se cortan en los extremos del diámetro común DD′ y dividen a la esfera en cuatro regiones llamadas *ángulos esféricos* ; cada una está comprendida en uno de los cuatro diedros en que sus planos dividen al espacio.

La medida de cada uno de estos diedros se toma como medida del ángulo esférico correspondiente; si este ángulo es recto, las circunferencias máximas se llaman *perpendiculares* .

Polos de un círculo máximo

Los extremos del diámetro perpendicular a un círculo máximo se llaman polos del mismo.

Desde un punto A de la superficie esférica no perteneciente a una circunferencia máxima c y distinto de sus polos, se puede trazar una sola circunferencia máxima perpendicular a la primera ; es la que pasa por A y por los dos polos de c . Si Q y Q′ son las intersecciones de esta circunferencia perpendicular con c , se llama distancia de A a c al menor de los arcos AQ , AQ′ .



Anexo 3

Fórmulas vectoriales notables

Designemos por a , b , c , d unos vectores genéricos de un espacio vectorial euclídeo de tres dimensiones; a·b indicará el producto escalar de a y b , y axb el producto vectorial de ambos vectores.

Pueden demostrarse fácilmente las dos identidades siguientes, que serán fundamentales:

$$1)\quad a\cdot(b\times c) = (a\times b)\cdot c.$$

Los dos miembros expresan el producto mixto de los tres vectores a , b , c .

$$2)\quad a\times(b\times c) = (a\cdot c)\,b - (a\cdot b)\,c.$$

La demostración puede reducirse a una comprobación directa, utilizando tres componentes para cada vector.

Como consecuencia de estas dos identidades fundamentales, resultan otras dos :

$$3)\quad (a\times b)\times(c\times d) = ((a\times b)\cdot d)\,c - ((a\times b)\cdot c)\,d =$$
$$= ((d\times a)\cdot b)\,c - (\,(c\times a)\cdot b)\,d.$$

$$4)\quad (a\times b)\cdot(c\times d) = ((a\times b)\times c)\cdot d = ((a\cdot c)\,b - (b\cdot c)\,a)\cdot d =$$
$$= (a\cdot c)(b\cdot d) - (b\cdot c)(a\cdot d).$$

Apéndice

1. Dependencia entre los cuatro grupos de Bessel

En estas notas hemos demostrado las fórmulas de los cuatro grupos de Bessel basándonos en los grupos de los cosenos y de los senos ; en rigor, no obstante, bastaría con el grupo de los cosenos como fundamental, puesto que el de los senos puede deducirse a partir de él. En efecto, a partir de la identidad

$$sen A = 2\, sen\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

y mediante las fórmulas de Briggs, se obtiene :

$$sen A = \frac{2\sqrt{sen s\; sen(s-a)\; sen(s-b)\; sen(s-c)}}{sen b\; sen c},$$

de donde

$$\frac{sen A}{sen a} = \frac{2\sqrt{sen s\; sen(s-a)\; sen(s-b)\; sen(s-c)}}{sen a\; sen b\; sen c}.$$

La simetría de la fórmula pone de manifiesto la constancia de la razón entre el seno de un ángulo y el seno de su lado opuesto :

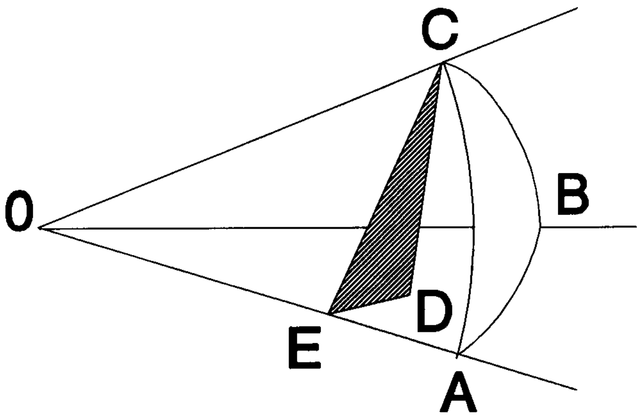
$$\frac{sen A}{sen a} = \frac{sen B}{sen b} = \frac{sen C}{sen c}.$$

Por consiguiente, el grupo de los cosenos puede considerarse como *generador* de los cuatro grupos de Bessel.

2. Diversas demostraciones del grupo de los cosenos

Existen muchas demostraciones para el grupo de los cosenos. Algunas de ellas presentan un interés especial, por lo que las reproducimos a continuación, indicando sus líneas generales ; el lector debe completar y justificar los detalles.

A)



En el gráfico se verifican las relaciones siguientes :

a) CD es perpendicular a OE y ED , por serlo al plano OAB.

b) Al ser OE perpendicular simultáneamente a DE y a CD también es perpendicular a CE .

c) OE = OC cos b ; CE = OC sen b ; DE = OC sen b cos E

El ángulo E es igual al ángulo A del triángulo esférico.

d) Multipliquemos escalarmente todos los términos de la igualdad vectorial :

OC = OE + ED + EC

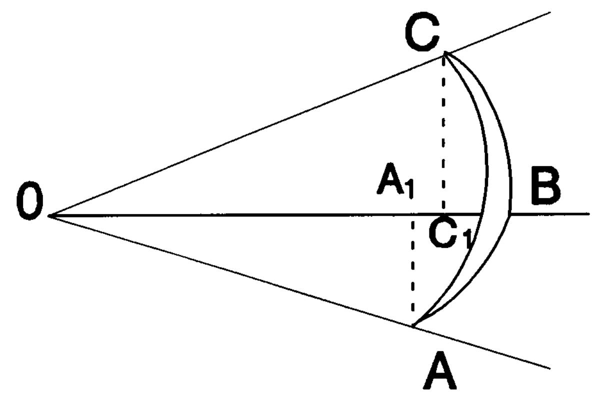
por el vector OB , que consideraremos unitario .

Se obtiene así la igualdad escalar :

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A,$$

que es una de las fórmulas del grupo de los cosenos, de la que se deducen las demás por permutación de letras.

B)

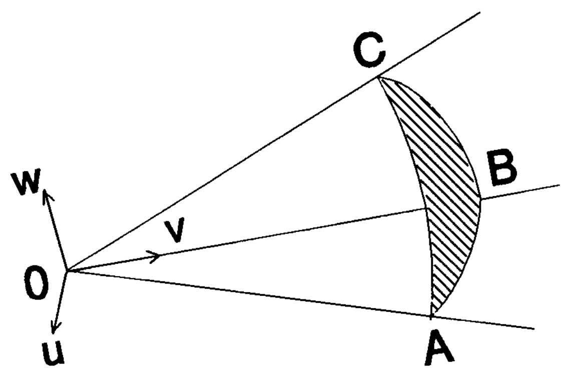


Suponemos unitarios los vectores OA , OB y OC . Teniendo en cuenta las igualdades vectoriales :

$$OC = OC_1 + C_1C \,, \quad OA = OA_1 + A_1A \,,$$

si se calcula el producto escalar OC . OA se obtiene una de las fórmulas del grupo de los cosenos .

C)



Considérese la base u , v , w tal que u , v sea una base ortonormal del plano OAB y v , w una base también ortonormal del plano OBC .

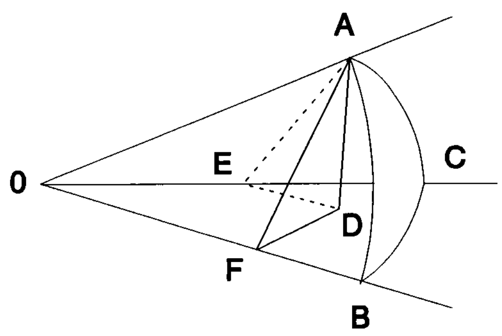
a) Formar la matriz M del producto escalar ordinario, en esta base.
b) Hallar las componentes de los vectores OA y OC .

c) Comprobar que ambos vectores son unitarios.
d) Calcular el producto escalar OA . OC como producto de las normas de ambos vectores por el coseno del ángulo que determinan.
e) Calcular el mismo producto escalar mediante la matriz M .
f) Al igualar los dos resultados obtenidos en los apartados d) y e) se obtendrá una de las fórmulas del grupo de los cosenos.

3. Demostración gráfica del grupo de los senos

Obsérvese la figura : AD es perpendicular al plano BOC , E y F son las proyecciones ortogonales del punto D sobre las rectas OC y OB, respectivamente. Por consiguiente, AE es perpendicular a OE y AF lo es a OF .

El ángulo AED es igual al C del triángulo esférico ABC y el ángulo AFD es igual al B del mismo triángulo



En los triángulos rectángulos ADE y ADF se verifica :

$$AD = AE\,senE = AE\;senC,$$

$$AD = AF\,senF = AF\,senB.$$

Ahora bien,

$$AE = OA\,senb \quad y \quad AF = OA\,senc,$$

por lo que

$$OA\,senb\;senC = OA\,senc\;senB,$$

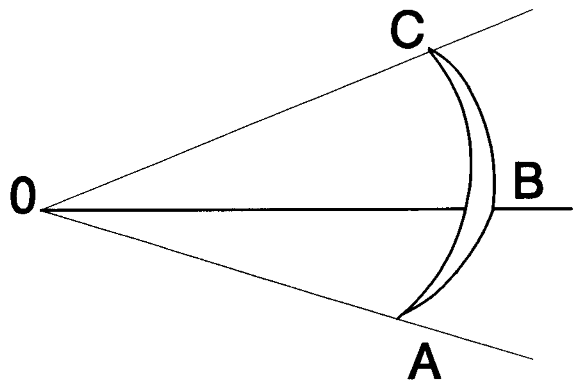
y por consiguiente

$$sen b\ sen C = sen c\ sen B,$$

que es una de las fórmulas del grupo de los senos. Permutando letras, se obtienen las restantes.

4. Seno de un triedro

Dado un triedro con vértice en un punto O , consideremos el triángulo esférico ABC resultante de la intersección con una superficie esférica de centro en O y radio unidad.



De las fórmulas que intervienen en el grupo de los senos se deducen las igualdades siguientes :

$$sen A\ sen b\ sen c = sen B\ sen a\ sen c = sen C\ sen a\ sen b.$$

El valor constante obtenido como producto del seno de un ángulo del triángulo (o de un ángulo diedro del triedro) por los senos de los lados que lo definen (o de las caras que limitan al diedro) recibe el nombre de *seno del triedro* .

Utilizando este nuevo concepto, pueden enunciarse unos resultados notables, cuya justificación dejamos a cargo del lector :

a) El volumen del tetraedro OABC es la sexta parte del seno del triedro.

b) El volumen de un tetraedro cualquiera es igual a la sexta parte del producto de tres aristas concurrentes por el seno del triedro que determinan.

c) Si OA , OB y OC son tres vectores unitarios que determinan una base de un espacio vectorial de tres dimensiones, el seno del triedro OABC es igual al producto mixto [OA,OB,OC].

5. Resolución de casos "dudosos" sin ángulos auxiliares

En realidad, no tiene ninguna dificuldad especial calcular los elementos desconocidos de un triángulo esférico, cuando se conocen dos lados (o ángulos) y el ángulo (o lado) opuesto a uno de ellos, sin necesidad de utilizar ningun ángulo auxiliar. El cálculo será, por tanto, realmente "independiente", en el sentido que no se utiliza ningun resultado parcial, sinó sólo los datos iniciales.

Sólo cabe resolver una simple ecuación trigonométrica, i hacer uso de las substituciones adecuadas; por ejemplo, si utilizamos el cambio tg x/2 = t, se obtienen expresiones racionales para sen x y cos x.

Supongamos que los datos son: a, b, A y la incógnita es el lado c :

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A.$$

La ecuación trigonométrica que se ha de resolver es del tipo:

$$m \cos c + n \operatorname{sen} c = p,$$

con

$$m = \cos b, \quad n = \operatorname{sen} b \cos A, \quad p = \cos a.$$

El cambio tg c/2 = t nos da:

$$m\frac{1-t^2}{1+t^2} + n\frac{2t}{1+t^2} = p,$$

es decir:

$$m(1-t^2) - 2nt = p(1-t^2),$$

$$(m-p)t^2 - 2nt + (p-m) = 0.$$

i por tanto

$$t = tg\frac{c}{2} = \frac{n \pm \sqrt{n^2+m^2-p^2}}{m+p}$$

Ejemplo resuelto

En un triángulo esférico a = 74° 35′, b = 83° 17′, A = 113° 42′, queremos calcular el lado c.

Solución

$$tg\frac{c}{2} = \frac{sen b \cos A - \sqrt{(sen b \cos A)^2 + \cos^2 b - \cos^2 a}}{\cos a + \cos b},$$

$$tg\frac{c}{2} = 0.20273,\ \frac{c}{2} = 11°27.5',\ c = 22°\,55'.$$

Sólo se ha tenido en cuenta el signo + para la raiz cuadrada, porqué tg c/2 ha de ser positiva, al ser c/2 un ángulo de primer cuadrante.

En algún caso, la ecuación de segundo grado puede proporcionar dos soluciones; por ejemplo, si a = 51° 42′, A = 68° 39′, B = 74° 07′ i queremos calcular el ángulo C:

$$\cos A = -\cos B \cos C + sen B\, sen C \cos a,$$

$$p = m \cos C + n\, sen C,$$

con m = - cos B, n = sen B cos a, p = cos A.

Con el cambio tg C/2 = t, se obtiene la ecuación:

$$(m+p)t^2 - 2nt + (p-m) = 0,$$

y por tanto:

$$t = \frac{n \pm \sqrt{m^2+n^2-p^2}}{m+p}.$$

En este caso, las dos soluciones son positivas:

$$t_1 = 12.6318,$$

$$t_2 = 0.5586.$$

y se obtienen dos valores para el ángulo C:

$$C_1 = 170^\circ\ 57',$$
$$C_2 = 58^\circ\ 23'.$$

Entonces, una fórmula de Bessel, para el ejemplo:

$$\cos B = -\cos A \cos C + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos b,$$

decidirá como se ha de aparejar los dos valores del ángulo C con los dos valores que se obtienen para el lado b al utilizar la fórmula de los senos de los datos iniciales.

Evidentemente, la ecuación trigonométrica que se plantea en cada caso "dudoso" se puede resolver utilizando cualquier otra substitución adecuada; por ejemplo, para calcular el lado c de un triángulo esférico de lados a, b y del ángulo A sólo hace falta considerar que

$$\operatorname{sen} c = \sqrt{1 - \cos^2 c}$$

por tener una ecuación irracional de fácil resolución y discusión.

Ejercicios propuestos

136.- Resolver con cálculos independientes un triángulo esférico del cual se conocen:

$$a = 76^\circ\ 32',\ c = 60^\circ\ 12',\ A = 112^\circ\ 22'.$$

137.- Resolver, con cálculos independientes, el triángulo esférico del cual se conocen:

$$A = 102^\circ\ 34',\ B = 72^\circ\ 11',\ a = 120^\circ.$$

138.- Encontrar los elementos que faltan en los dos triángulos esféricos que comparten los siguientes elementos:

$$a = 100^\circ\ 34',\ b = 75^\circ\ 22',\ B = 61^\circ\ 20'.$$

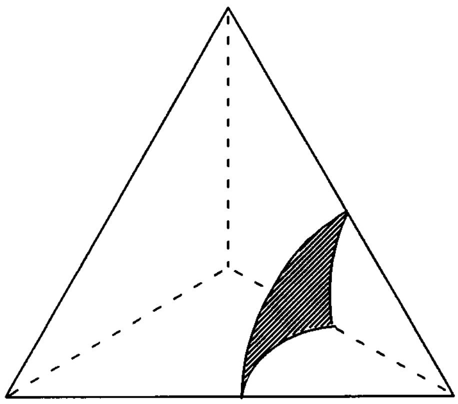
Hacer todos los cálculos independientes.

Algunas aplicaciones de la Trigonometría esférica

1. Cálculo de ángulos diedros

Ejemplo

Para calcular el ángulo diedro que determinan dos caras contiguas de un tetraedro regular, basta tener en cuenta que es un ángulo de un triángulo esférico equilátero, cuyos tres lados miden 60° :



$$\cos A = \frac{\cos 60^\circ - \cos^2 60^\circ}{sen^2 60^\circ}\ , \quad A = 70^\circ\, 31{,}7'\,.$$

Ejercicios propuestos

139.- Calcular los ángulos diedros de dos caras contiguas de los poliedros regulares siguientes: octaedro, dodecaedro, icosaedro.

140.- Calcular el ángulo diedro de dos caras laterales de una pirámide recta regular de base pentagonal, cuya arista básica mide 8 cm y su arista lateral 12 cm.

141.- Calcular el ángulo diedro que forma la base de la pirámide del ejercicio anterior con una de sus caras laterales.

142.- Recibe el nombre de *ángulo sólido* de un triedro el área del triángulo esférico obtenido como intersección del triedro con una superficie esférica de radio unidad y centro en el vértice del mismo.

De acuerdo con esta definición, calcular el ángulo sólido de uno cualquiera de los triedros de un tetraedro regular.

143.- El ángulo sólido de un poliedro es el área del polígono esférico obtenido como intersección de dicho polígono y una superficie esférica de radio unidad cuyo centro esté en el vértice del ángulo poliedro. Esta área es la suma de las áreas de los triángulos esféricos en los que se puede descomponer el polígono.

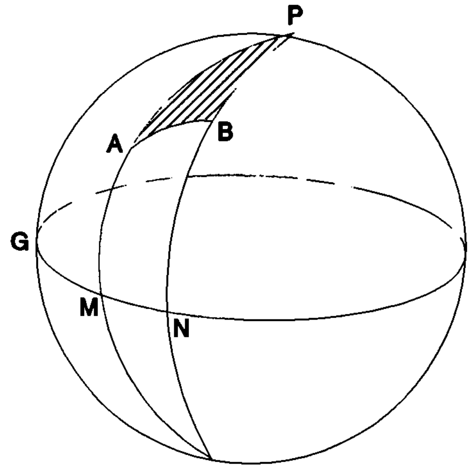
Demostrar que el ángulo sólido de un poliedro es igual a la diferencia entre la suma de sus n ángulos medidos en radianes, y $(n-2)\pi$.

144.- Demostrar que la suma de todos los ángulos sólidos de un poliedro es igual al doble de la suma de sus ángulos diedros y $2\pi(v-a)$, siendo v el número de vértices del poliedro y a el número de sus aristas.

145.- Calcular el ángulo sólido del ángulo poliedro cuyo vértice es el de una pirámide recta regular de base pentagonal cuya arista básica mide 8 cm y su arista lateral 12 cm .

2. Navegación

En la esfera terrestre, la circunferencia máxima MN representa el Ecuador , P es uno de sus polos, y PA , PB los meridianos de los puntos A y B , respectivamente. El meridiano PG es el que tomamos como origen de longitudes geográficas (meridiano de Greenwich).



MA = latitud de A; NB = latitud de B. GM = longitud de A; GN = longitud de B.

Conociendo las coordenadas geográficas (latitud , longitud) de dos puertos A y B , el triángulo esférico PAB (P es uno de los polos geográficos) nos permite calcular

a) La distancia en millas entre A y B (una milla marina es la longitud de un arco de un minuto de un meridiano terrestre) .

b) El *rumbo* inicial (ángulo PAB) .

c) El *rumbo* final (ángulo 180° - PBA) .

d) El *vértice* de la "derrota" , es decir, el punto del arco AB que tenga mayor latitud.

Ejercicios propuestos

146.- Un barco ha de salir del puerto A (latitud 20° 31′ N, longitud 70° 11′ E) y llegar al puerto B (latitud 42° 22′N, longitud 10° 45′ W) . Calcular :

a) La distancia AB (llamada distancia *ortodrómica*).

b) El rumbo inicial .

c) El rumbo final .

d) El vértice de la "derrota" seguida por el barco .

147.- Calcular la distancia ortodrómica entre un puerto A (latitud 35° 23′ N , longitud 41° 02′ E) y otro B situado en el mismo paralelo, cuya longitud es de 61° 37′. Comparar esta distancia con la longitud del arco de paralelo AB ; tomar como medida del radio de la Tierra 6373 m y para la milla marina 1852 m .

148.- Un buque salió de A (latitud 41° 35′ N , longitud 12° 03′ W) y navegó con rumbo de salida N 60° 12′ E durante 8 horas, a una velocidad de 14 nudos (1 nudo = 1 milla/hora) recorriendo siempre un arco de circunferencia máxima. Calcular la situación del buque al cabo de las 8 horas.

149.- Un buque salió del puerto P situado en el hemisferio Norte con rumbo N 56° 12′E y llegó al puerto R con rumbo N 73° 47′ E , después de haber navegado 3.240 millas siguiendo siempre una circunferencia máxima.Calcular las latitudes de los puertos P y R.

150.- Siguiendo el ejercicio anterior, si la longitud de P era de 56° 32′W , calcular la longitud de R .

151.- ¿Cuál es el vértice de la derrota seguida por el buque al desplazarse desde el puerto P al Q siguiendo siempre una circunferencia máxima?

152.- Un buque salió del puerto A (latitud=41° 35′ N ; longitud =135° 30′ E) y navegó con rumbo desconocido,hacia el este, siguiendo siempre una circunferencia máxima, hasta llegar a un puerto B de latitud 48° 22′ N . Si recorrió en total 3200 millas, se pide:
a) Rumbo de salida. b) Rumbo al llegar a B. c) Longitud del puerto B .

153.- De un puerto A salen simultáneamente dos buques que navegan siguiendo arcos de circunferencias máximas del tercer cuadrante. El primer buque recorre 3520 millas y llega al puerto B (15° 23′ N , 135° 21′ E) mientras el segundo buque recorre 4200 millas y llega al puerto C (24° 12′ N , 135° 21′ E). Calcular el rumbo de llegada de cada uno de los dos buques.

154.- Las longitudes de dos puertos A y B situados en el hemisferio norte son, respectivamente, 65° 23′ W y 72° 32′E.

Un buque salió el día 8 de enero a las 16 h 30 m del puerto A con rumbo N 64°13'E y velocidad 12 nudos para dirigirse al puerto B navegando siempre por un arco de circunferencia máxima. Sabiendo que el rumbo de llegada a B ha sido N 75°22' E, se pide:

a) Las latitudes respectivas de A y B .
b) El día y hora de llegada del buque al puerto B.

155.- Un buque sale del puerto A (34° 21'N , 25° 11' E) el día 20 de diciembre de 1992 a las 5 h 30 m. Navega siguiendo un arco de circunferencia máxima, con rumbo de salida N 76° 23' E y una velocidad de 13 nudos. Calcular la situación del buque el día 24 de diciembre a las 24 h .

156.- La demora de un buque, tomada desde un radio-faro A, es S 65° 23' W y la distancia 1650 millas. Averiguar la situación del buque, si las coordenadas geográficas del radio-faro son : 42° 11' N , 85° 34' W .

157.- Un buque salió de un puerto A situado en el hemisferio norte, cuya longitud es 35° 21' E, el día 23 de mayo a las 14 h y navegó a una velocidad de 12 nudos con rumbo de salida N 50° 33'E siguiendo siempre un arco de circunferencia máxima. Llegó al puerto B el día 30 de mayo a las 5 h 43 m, con rumbo N 39° 44' E. Calcular:

a) Las coordenadas geográficas de A.
b) La situación del puerto B.

158.- A las 14 h 20 m del día 3 de enero salió un buque del puerto A (39° 33' N , 82° 11' E) a una velocidad de 10 nudos, navegando según un arco de paralelo. De un puerto situado a 20° 45' N , 23° 10' E salió en su persecución otro buque a una velocidad de 20 nudos, siguiendo un arco de circunferencia máxima, y le dio alcance a las 21 h 10 m del día 5 de enero. Averiguar:

a) El rumbo de salida del buque perseguidor.
b) El día y la hora en que salió este buque.
c) La situación del punto de encuentro de ambos buques.

159.- Dos buques salen simultáneamente de los puertos:

A (15° 54' N , 45° 11' W)
B (42° 21' N , 14° 44' E)

navegando a una velocidad de 10 nudos, y siguiendo ambos circunferencias máximas. Si coinciden al pasar por el meridiano de longitud 10° 32' E , calcular :

a) La latitud del punto de encuentro.
b) La distancia navegada por ambos buques.

160.- Para calcular la distancia d entre dos puntos A i B, de coordenadas geográficas respectiva (l_1, L_1) i (l_2, L_2), se utiliza la fórmula siguiente:

$$\cos d = \text{sen } l_1 \text{ sen } l_2 + \cos l_1 \cos l_2 \cos (L_2 - L_1)$$

¿Como puede justificar-se?

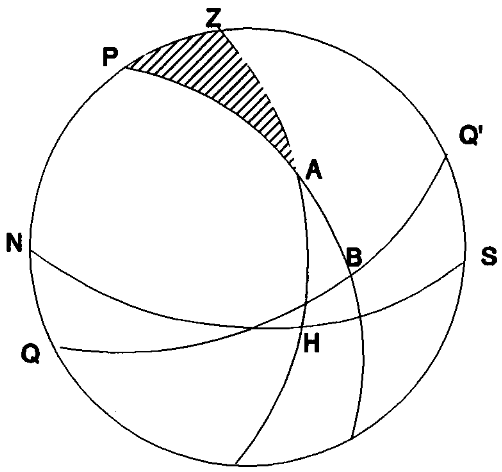
161.- Escribir una fórmula para calcular el rumbo de salida para recorrer la distancia ortodrómica entre los puntos A i B del ejercicio anterior.

162.- ¿Cual seria la fórmula para el rumbo de llegada al punto B, siempre siguiendo el recorrido ortodrómico entre A i B ?

3. Astronomia

En la esfera celeste, la circunferencia máxima QQ' es el Ecuador, P uno de sus polos, y PA el círculo horario del astro A ; la circunferencia máxima SN es el horizonte del lugar, el punto Z es el cenit del observador, ZA el círculo vertical del astro, y ZP el meridiano del lugar.

El triángulo esférico PZA (polo-cenit-astro) es fundamental en muchas cuestiones de Astronomía .



BA es la declinación del astro A; SH es su azimut; HA es la altura del astro; NP es la latitud del lugar. P es el ángulo horario del astro A.

Ejercicios propuestos

163.- Se está observando un astro y se anota : declinación 47° 21′ , azimut 76° 32′ , altura 32° 22′ . ¿Cuál es la latitud del lugar desde donde se realiza la observación ?

164.- La latitud de un lugar es 41° 23′ . ¿Cuántas horas y minutos durará el día más largo del año en este lugar ? Téngase en cuenta que en dicho día la declinación del Sol es de 23° 27′

165.- El azimut de un astro es de 76° 12′ y su altura 49° 25′ observado desde un lugar de latitud 43° 34′ . Calcular la declinación de dicho astro.

166.- Calcular la "altura meridiana" del Sol el día en que su declinación es de 23° 27′, en un lugar cuya latitud es de 40° 23′. En este instante del paso meridiano, ¿cuál es la longitud de la sombra que produce un poste vertical de 2 m sobre un plano horizontal?

167.- Un marino calcula una noche la altura de la estrella polar, que es de 42° 21′ . El Sol se ha puesto a las 19 horas. ¿Cómo calculará la declinación del Sol en el instante de su puesta?

168.- El azimut y la altura son las coordenadas horizontales de un astro, mientras que el ángulo horario y la declinación son las coordenadas horarias, o también coordenadas ecuatoriales locales, del mismo astro.

En un lugar de latitud l, escribir las fórmulas de paso de las coordenadas horizontales a las horarias, y a la inversa.